UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

FORMA HOMOTÓPICA DEL TEOREMA DE CAUCHY

POR:

MARCOS A. PEÑA C.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL

GRADO DE MAESTRO EN MATEMÁTICA PURA

PANAMÁ REPUBLICA DE PANAMÁ

2018

Introducción

El mérito de Augustin Louis Cauchy consiste en haber desarrollado los fundamentos de la teoría general de las funciones analíticas, estudiando el campo de la variable compleja.

El Teorema de Cauchy es una de las declaraciones más importantes sobre las integrales de línea para las funciones analíticas en el plano complejo. Esencialmente, dice que, la integral de una función analítica bajo una curva cerrada es igual a cero o si dos curvas diferentes que conectan los mismos dos puntos entonces para una función analítica sobre las dos curvas, la integral de la función en las distintas dos curvas, serán iguales.

Estudiar este Teorema utilizando el concepto de Homotopía nos permite presentar una distinta y moderna demostración del Teorema de Cauchy, el cual hemos denominado "Forma Homotópica del Teorema de Cauchy"

Esta versión nos da la oportunidad de examinar y analizar una forma distinta de demostración que nos permite conocer el alcance y profundidad del teorema y proporciona al matemático un buen método demostrativo. Así, este trabajo , bajo esta concepción, muestra las condiciones sobre una curva *cerrada* γ *talque* $\int_{\gamma} f = 0$ *para una función analítica. Estas condiciones son más geométricas, pero sin las numerosas condiciones de otras versiones.*

El primer capítulo de la tesis presenta los conceptos previos y necesarios para mostrar las propiedades elementales de las funciones analíticas y algunos resultados útiles en el estudio y demostración de la Forma Homotópica del Teorema de Cauchy.

El segundo capítulo se dedica al estudio del concepto de la integración de funciones de variable compleja a través de la integral de Riemann-Stieltjes desarrollando los conceptos de variación acotada, caminos equivalentes, caminos rectificables y la integración de línea.

El tercer capítulo describe las nociones básicas del concepto de Homotopía para presentar la "Forma Homotópica del Teorema de Cauchy" y su demostración. Como también describe las condiciones, bajo la cual, se cumple el recíproco de este Teorema.

Es cierto que la declaración de un teorema no es tan importante como su prueba. El examinar la Forma Homotópica del Integral de Cauchy proporciona una compresión natural del alcance de su validez y profundiza su comprensión.

Índice

Pág.

Capítulo 1

Funciones Analíticas

En este Primer capítulo presentamos los conceptos previos necesarios, para mostrar la definición y propiedades elementales de las funciones analíticas en una región del plano. Se hace referencia a la importancia de versiones conocidas del Teorema de Cauchy y se exponen los conceptos de límite y continuidad de una función de variable compleja como también se desarrolla la noción de conexidad de los conjuntos.

1.1 Referencia, notación y conceptos previos.

El Teorema Integral de Cauchy fue descubierto en 1825 por Agustin Louis de Cauchy (1789-1857), siendo desarrollado por Edouard Goursat (1858-1936) en su famoso Cours d'Analyse Mathématique (Curso de Análisis Matemático), a principios del siglo XX.

Afirma el teorema que la integral de una función analítica bajo una curva cerrada es igual a cero o si dos curvas diferentes que conectan los mismos dos puntos entonces para una función analítica sobre las dos curvas, la integral de la función en las distintas dos curvas, serán iguales.

Si bien en la primera formulación del Teorema de Cauchy se exigía como hipótesis para el cumplimiento del teorema que la función $f(z)$ fuera analítica en el dominio G, con derivada continua, las investigaciones de Goursat permitirían probar que no es necesario que la derivada fuera continua para que el valor de la integral sea cero. Probó que el teorema sigue siendo válido cuando el dominio G contiene un número finito de puntos singulares. Esta versión del Teorema de Cauchy- Goursat se desarrolla bajo la condición que el dominio fuera convexo.

En los textos utilizados en el área de matemática usualmente podemos encontrar ampliamente explicado la demostración del Teorema de Cauchy de forma rápida usando las Ecuaciones de Cauchy-Riemann y el Teorema de Green.

Otra forma de demostración, encontrados en los textos, seria bajo la perspectiva de Edouard Goursat en donde se desarrolla el Teorema de Cauchy en las situaciones en que la curva sobre la que se extiende la integral es rectangular o triangular, considerando el caso de existencia de puntos singulares y que consiste en sucesivas bisecciones del recinto delimitado por la *curva cerrada o si utilizamos serie podemos observaremos el Teorema Integral de Cauchy en un disco.*

Con la intención de presentar una forma distinta y moderna, la demostración del Teorema de Cauchy, en este trabajo, presenta una condición sobre una curva cerrada γ *tal que* $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *para una función analítica. Esta condición también se puede usar para introducir el concepto de simplemente conexo en donde el Teorema de Cauchy es válido para cada función analítica y cada curva cerrada rectificable.*

Con el concepto de Edouard Goursat el Teorema de Cauchy es válido en cualquier región convexa, sin embargo, es conocido que para $\gamma: [0,1] \rightarrow C - \{0\}$, *como el círculo* $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, *tenemos :* $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ *por lo tanto el teorema de Cauchy no es válido para la región* $G = C - \{0\}$.

La condición exigida a la curva cerrada γ, *en este trabajo, nos permitirá explorar para qué regiones de G el Teorema de Cauchy sigue siendo válido, esto lo haremos utilizando el concepto de Homotopía.*

En lo que sigue, $z = x + iy$ es un número complejo con parte real x y parte imaginaria y. Denotaremos con C el conjunto de los complejos, con su estructura de cuerpo conmutativo con las operaciones de suma y producto entre complejo. También denota al plano complejo $C = R^2$, identificado cada complejo $z = x + iy \epsilon C$ con el punto $(x, y) \epsilon R^2$.

El módulo de un complejo z es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se cumple la desigualdad triangular $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ y además $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. El conjugado $\bar{z}$ de un complejo $z = x + iy$ es $\bar{z} = x - iy$.

Si z_0 es algún punto del plano complejo, cualquier círculo que contenga en su interior a este punto, se llama entorno del mismo. En particular, todo círculo con centro en z_0, se denomina entorno del punto

$$z_0 : |z - z_0| < \delta \qquad (\delta > 0).$$

Tomemos ahora un conjunto E arbitrario de puntos del plano complejo. Se dice que z_0 es un punto de acumulación para el conjunto E (o del conjunto E), si cualquier entorno del punto z_0 contiene un conjunto infinito de puntos perteneciente a E.

Es evidente que un conjunto que consta de un número finito de puntos no posee puntos de acumulación.

Ahora, usando el módulo o valor absoluto de un número complejo, se define una distancia en C *mediante:*

$$d(z,w) \coloneqq dis(z,w) = |z-w| \qquad para\ z,w \in C$$

Si $z \in C$ *y* $r > 0$ *es cualquier número positivo, se definen las bolas o discos abiertos de centro z y radio* $r > 0$ *como*

$$B(z\,;r) := \{w \in C : d(z,w) < r\}$$

Un conjunto $G \subseteq C$ *se dice que es un conjunto abierto si para todo* $z \in G$ *existe un disco abierto* $B(z\,;\varepsilon)$ *totalmente contenido en* G, $B(z\,;\varepsilon) \subseteq G$.

También puede enunciarse que un conjunto G *se dice abierto, si para cada uno de sus puntos existe un entorno cuyos puntos todos pertenecen a* G, *en este caso, también se dice que z es un punto interior de* G.

Dicho en otras palabras, G *es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores. Son ejemplos de conjuntos abiertos: el conjunto de todos los puntos del plano, el conjunto de todos los puntos no pertenecientes a un conjunto finito dado de rectas o circunferencias, el conjunto de todos los puntos situado en el interior de un círculo dado, etc. El conjunto vacío también se considera abierto.*

1.1.1 Ejemplo. *Una bola abierta $B(z\,;r)$ es un conjunto abierto.*

En efecto, si $G = B(z\,;r)$ *con* $r > 0$ *y si* $w \epsilon B(z\,;r)$ *es cualquier punto, entonces* $d(w,z) < r$ *y escribiendo* $r = d(w,z) + \delta$ *se tiene que* $\delta > 0$, *ahora, si* $w = z$, *se toma el disco* $B(w\,;\varepsilon) = B(z\,;r) \subseteq G$.

Si $w \neq z$, *entonces* $d(w,z) > 0$ *y si se toma* $\varepsilon \coloneqq \text{mín}\{\delta, d(w,z)\}$, *entonces* $B(w\,;\varepsilon) \subseteq B(z\,;r) = G$ *porque para todo* $u \epsilon B(w\,;\varepsilon)$ *se tiene que*

$$d(u,z) \leq d(u,w) + d(w,z) < \varepsilon + d(w,z)$$

$$\leq \delta + d(w,z) = r - d(w,z) + d(w,z) = r$$

por lo que $d(u,z) < r$ *y así* $u \epsilon B(z\,;r) = G$.

Otra clase de subconjuntos de C, *son los complementos de los conjuntos abiertos. Un conjunto* $A \subseteq C$ *es un conjunto cerrado si su complemento* $C - A$ *es abierto.*

1.1.2 Ejemplo. *Si* $z \epsilon C$ *y* $r > 0$ *es cualquier número real positivo, se definen las bolas o discos cerrados de centro* z *y* $r > 0$ *mediante*

$$\bar{B}(z;r) \coloneqq \{w \epsilon C : d(z,w) \leq r\},$$

un disco cerrado es un conjunto cerrado. En efecto, si $w \in C - \bar{B}(z;r)$, *entonces* $d(z,w) > r$ *y tomando* $\varepsilon = d(z,w) - r > 0$ *se tiene que* $B(w;\varepsilon) \subseteq C - \bar{B}(z;r)$, *ya que para cualquier* $u \in B(w;\varepsilon)$ *si sucediera que* $d(u,z) \leq r$, *entonces se tendría que*

$$d(z,w) \leq d(z,u) + d(u,w) \leq r + d(u,w)$$

y por lo tanto $d(u,w) \geq d(z,w) - r = \varepsilon$, *en contradicción con el hecho de que* $u \in B(w;\varepsilon)$. *Se sigue que* $d(u,z) > r$ *y consecuentemente* $u \in C - \bar{B}(z;r)$.

1.1.3 Polígono. *Dado dos puntos* $z, w \in C$, *denotaremos con* $[w, z]$ *al segmento de recta con extremo inicial* w *y extremo final* z, *es decir,*

$$[w,z] \coloneqq \{tz + (1-t)w : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Un Polígono en C es un conjunto de la forma $P = \cup_{k=1}^{m} [z_{k-1}, z_k]$ *donde* $[z_{k-1}, z_k]$ *son segmento tales que el extremo final de* $[z_{k-1}, z_k]$ *es igual al extremos inicial* $[z_k, z_{k+1}]$. *Decimos que P es un polígono que une* z_0 *con* z_m *y también usaremos la notación* $P = [z_0, z_1, \ldots, z_m]$.

1.1.4 Funciones complejas. *Expresemos* $f: G \to C$ *como una función compleja* $f = f(z)$ *de variable compleja* $z \epsilon C$.

Observe que como el dominio de las funciones de la forma 1.1.4 es el campo de números complejos, las funciones anteriores se pueden sumar, restar y multiplicar (y dividir, siempre y cuando el denominador no sea cero).

Las definiciones son las usuales: si $f, g: G \to C$ *son dos funciones, su suma es la función* $f + g: G \to C$ *definida por* $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$, *su producto es la función* $f \cdot g: G \to C$ *dada por* $(fg)(z) = f(z)g(z)$. *La resta* $f - g: G \to C$ *está dada por* $(f-g)(z) = f(z) - g(z)$ *y el cociente* f/g *tiene como dominio al conjunto* $G' \coloneqq \{z \epsilon G : g(z) \neq 0\}$ *y se define, para* $z \epsilon G'$ *mediante* $(f/g)(z) = f(z)/g(z)$.

Si $f: G \to C$ *y* $g: \Delta \to C$ *son dos funciones tales que para todo* $z \epsilon G$ *se tiene que* $f(z) \epsilon \Delta$, *es decir, la imagen del conjunto* G *bajo* f

$$f(G) \coloneqq \{f(z) : z \epsilon G\},$$

está contenida en Δ, *entonces se define la composición* $g \circ f: G \to C$ *como* $(g \circ f)(z) = g(f(z))$.

1.1.5 Límite. *Si* $f: G \rightarrow C$ *es una función y* z_0 *es un punto de acumulación de* G*, se dice que un número completo* $L \epsilon C$ *es el límite de* f *cuando z se aproxima a* z_0 *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que siempre que*

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad y \quad z \epsilon G \ ,$$

se tiene que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$*. Como para el caso de funciones reales de variable real, si el límite L anterior existe, este es único y lo denotaremos por:*

$$L = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

1.1.6 Continuidad. *Una función* $f: G \rightarrow C$ *es continua en el punto* $z_0 \epsilon G$ *si* $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Se dice que una función $f: G \rightarrow C$ *es continua si lo es en cada punto de su dominio.*

1.1.7 Sucesión de números complejos*. Una sucesión de números complejos es una función* $s: \mathbb{N} \rightarrow C$*. Si* $n \epsilon \mathbb{N}$ *usaremos la notación* $s(n) =: s_n$ *para el valor de la sucesión s en el número natural n. También denotaremos a la sucesión s como* $\{s_n\}$.

Para el límite de una sucesión $\{s_n\}$ *de números complejos, diremos que* $\{s_n\}$ *tiene límite* $L \epsilon C$ *si para cada ε >0 existe un* $N \epsilon \mathbb{N}$ *tal que* $| s_n - L| < \varepsilon$ *siempre que* $n \geq N$ *. Se dice que la sucesión* $\{s_n\}$ *es convergente y que converge a* L *y se usa la notación* $\lim\{s_n\} = L$*. Si* $G \subseteq C$ *es cerrado tenemos que para toda sucesión* $\{s_n\} \subseteq G$ *convergente, su límite está en* G*.*

1.1.8 Sucesiones de Cauchy*. Si* $\{s_n\}$ *es una sucesión de complejos tal que* $\lim\{s_n\} = L \epsilon C$ *, observe que para todo ε > 0 existe un* $N \epsilon \mathbb{N}$ *tal que si* $m, n \geq N$ *se tiene que* $|s_m - s_n| < \varepsilon$*. En efecto, como* $\lim\{s_n\} = L \epsilon C$ *, para ε >0 existe un* $N \epsilon \mathbb{N}$ *tal que* $|s_m - L| < \varepsilon/2$ *siempre que* $m \geq N$*. Se sigue que sí* $m, n \geq N$ *entonces,*

$$|s_m - s_n| = |s_m - L + L - s_n| \leq |s_m - L| + |s_n - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

como se quería.

Una sucesión de números complejos $\{s_n\}$ *que satisface la condición anterior, es decir que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N \epsilon \mathbb{N}$ *talque si* $m, n \geq N$ *se tiene que* $|s_m - s_n| < \varepsilon$*, se dice que es una sucesión de Cauchy. Hemos así mostrado que en* C *toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Si escribimos $s_n = a_n + ib_n$ *podemos observar que* $\{s_n\}$ *es de Cauchy si y sólo si* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son de Cauchy, como sucesiones de números reales, además como en R toda sucesión de Cauchy es convergente, se tiene que en* C *toda sucesión de Cauchy converge a un número complejo. Es decir,* C *es completo. La completez de* C *es equivalente a la propiedad del teorema de Cantor siguiente, donde recordamos que si* $A \subseteq C$*, se define su diámetro como* $diámA := sup\{|z - w| : z, w \epsilon A\}$.

1.1.9 Teorema (Cantor). *Si* $\{F_n\}$ *es una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de* C *tales que:*

(1) $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots,$

(2) $Lím\{diámF_n\} = 0,$

entonces $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *consiste de un único punto.*

Demostración. Para cada n sea $z_n \epsilon F_n$ *un punto arbitrario. Por* (1)*, si* $m, n \geq N$ *se tiene que* $z_m, z_n \epsilon F_N$ *y por lo tanto* $|z_m - z_n| \leq diámF_N$.

Ahora, por (2), para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* $N \epsilon \mathbb{N}$ *tal que si* $k \geq N$ *se tiene que* $diámF_k < \varepsilon$*. Se sigue que si* $m, n \geq N$ *se tiene que* $|z_m - z_n| < \varepsilon$ *y por lo tanto* $\{z_n\}$ *es una sucesión de Cauchy en C y consecuentemente* $lím\{z_n\} = z \epsilon C$.

Como $F_n \subseteq F_N$ *para todo* $n \geq N$ *y como* $z_n \epsilon F_n$*, entonces* $z_n \epsilon F_N$ *para todo* $n \geq N$*, es decir la cola de la sucesión* $\{z_n\}$ *está contenida en* F_N *y como* F_N *es cerrado, se sigue que* $z \epsilon F_N$ *y por lo tanto* $z \epsilon F_n$ *para todo* n *y consecuentemente* $z \epsilon \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n =: F$ *y así* $F \neq \emptyset$*.*

Por otra parte, si $z, w \epsilon F$*, entonces* $z, w \epsilon F_n$ *para todo* n *y por lo tanto* $|z - w| \leq diám\, F_n$ *para todo* n *y como* $\text{lím}\{diám\, F_n\} = 0$ *se sigue que* $|z - w| = 0$*, es decir,* $z = w$ *y así* F *contiene un único punto.*

1.2 Funciones Analíticas

Sea G *un abierto no vacío del plano complejo* C.

1.2.1 Definición: *Una función* $f: G \to C$ *se dice analítica en el punto* $z_0 \epsilon G$ *si existe un disco* $B(z_0; r)$*, con* $r > 0$ *tal que:*

$$\textit{Para todo } z \epsilon B(z_0; r) \cap G: \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Donde la serie de la derecha es convergente puntualmente para todo z fijo en $B(z_0; r)$*.*

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \epsilon B(z_0; r)$ *se llama desarrollo en serie de potencias centrado en* z_0 *de la función* $f(z)$*.*

Notación: *Se denota* $H(G)$ *al conjunto de todas las funciones analíticas en G.*

1.2.2 Definición. *Una función* $f: G \rightarrow C$ *se dice analítica en* G *si es analítica para todo* $z_0 \in G$.

Nota. *De las definiciones anteriores y de las propiedades de que la suma de serie convergentes es la serie convergente de la sumas, y el producto de una serie convergente por una constante* k *es la serie convergente del producto de cada término por* k, *se deduce lo siguiente: Si* f *y* g *son analíticas en* G *entonces* $f+g$, $f \cdot g$, f/g *y* kf *también lo son.*

1.2.3 Definición: *Si* G *es un conjunto abierto en* C *y* f *una función de variable compleja* $f: G \rightarrow C$ *entonces* f *es derivable en un punto* $a \in G$, *si existe:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

con $h \in C$, *talque* $a+h \in G$. *El concepto puede expresarse también como la existencia de:*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a) \,,$$

f *es analítica en* G *si es derivable en a para todo* $a \in G$.

***1.2.4 Proposición**: Si f es diferenciable (derivable) en un punto $a \epsilon G$ entonces f es continua en a.*

Se demuestra análogamente al teorema de funciones reales de una variable real, visto en un curso de cálculo, que dice que toda función diferenciable es continua. Solo hay que sustituir en la demostración el valor absoluto de las variables reales por el módulo de las variables compleja.

Demostración. En efecto,

$$\lim_{z\to a}|f(z)-f(a)| = \left[\lim_{z\to a}\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}\ |z-a|\right] = \left[\lim_{z\to a}\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}\right]\left[\lim_{z\to a}|z-a|\right]$$

$$= |f'(a)|\cdot 0\ ,$$

de donde se sigue que $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.

Observe que si f es diferenciable en G entonces $f'(a)$ define una función $f': G \to C$. Si f' es continua entonces decimos que f es continuamente diferenciable. Si f' es diferenciable entonces f es dos veces diferenciable. Una función diferenciable tal que la derivada sucesiva es nuevamente diferenciable se llama infinitamente diferenciable en un punto $a \epsilon G$.

Una forma alterna de definir una función analítica seria:

1.2.5 Definición: *Una función f es analítica si f es continuamente diferenciable en G.*

Es importante señalar que las funciones constantes y la función z son analíticas.

1.2.6 Proposición. *Una función $f: G \rightarrow C$ es continua en el punto $z_0 \epsilon G$ si solo si para todo disco abierto $B(f(z_0);\ \varepsilon)$ con centro en $f(z_0)$ existe un disco abierto $B(z_0;\ \delta)$ tal que $B(z_0;\ \delta) \cap G \subseteq f^{-1}B(f(z_0);\ \varepsilon)$.*

Demostración. Por definición de limite la definición 1.1.6 quiere decir que, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre si $|z - z_0| < \delta$ y $z \epsilon G$, se tiene que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Interpretando las desigualdades anteriores en término de disco abiertos, se tiene que f es continua en $z_0 \epsilon G$ si y sólo si para todo disco abierto $B(f(z_0);\ \varepsilon)$ con centro $f(z_0)$, existe un disco abierto $B(z_0;\ \delta)$ con centro z_0 tal que para todo $z \epsilon B(z_0;\ \delta) \cap G$ se tiene que $f(z) \epsilon B(f(z_0);\ \varepsilon)$; es decir, $f(B(z_0;\ \delta) \cap G \subseteq B(f(z_0);\ \varepsilon))$. Dicho de otra manera, hemos probado que para cualquier disco abierto $B(f(z_0);\ \varepsilon)$ con centro $f(z_0)$, existe un disco abierto $B(z_0;\ \delta)$ tal que su intersección con G está contenida en la imagen inversa del disco $B(f(z_0);\ \varepsilon)$:

$$f^{-1}\big(B(f(z_0);\ \varepsilon)\big) \coloneqq \{z \epsilon G : f(z) \epsilon B(f(z_0);\ \varepsilon)\}.$$

1.2.7 Teorema. *Una función* $f: G \to C$ *es continua si y sólo si para todo abierto* $U \subseteq C$ *se tiene que* $f^{-1}(U)$ *es abierto en* G.

Demostración. Si $U \subseteq C$ *es abierto y* $z \epsilon f^{-1}(U)$, *entonces* $f(z) \epsilon U$ *y como* U *es abierto existe un disco* $B(f(z);\ \varepsilon) \subseteq U$. *Ahora, como* f *es continua en* z, *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $f(B(z;\ \delta) \cap G) \subseteq B(f(z);\ \varepsilon) \subseteq U$ *y por lo tanto* $B(z;\ \delta) \cap G \subseteq f^{-1}(U)$ *y por lo tanto* $f^{-1}(U)$*es abierto en* G. *Recíprocamente, si* $z \epsilon G$, *para todo* $\varepsilon > 0$ *por hipótesis* $f^{-1}B(f(z);\ \varepsilon)$ *es abierto en* G, *es decir, existe un abierto* $V \subseteq C$ *tal que*

$$f^{-1}B(f(z);\ \varepsilon) = V \cap G$$

y así $z \epsilon V$, *por lo que existe un disco* $B(z;\ \delta) \subseteq V$ *y consecuentemente* $B(z;\ \delta) \cap G \subseteq f^{-1}B(f(z);\ \varepsilon)$ *y así por la proposición anterior* f *es continua en* z, *para todo* $z \epsilon G$.

1.2.8 Corolario*. Sean* $f: G \to C$ *y* $g: \Delta \to C$ *funciones tales que* $f(G) \subseteq \Delta$ *y además* f *y* g *son continuas, entonces* $g \circ f: G \to C$ *es continua.*

Demostración. Si $U \subseteq C$ *es abierto, como* g *es continua se tiene que* $g^{-1}(U)$ *es abierto en* Δ, *y como* f *es continua se sigue que* $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}U)$ *es abierto en G.*

De la definición de derivada y de las propiedades de los límites de las funciones de variable compleja se deduce que las reglas fundamentales, conocidas en el cálculo diferencial, son válidas también para las derivadas de las funciones de variables complejas sobre un conjunto.

***1.2.9 Reglas**. Supongamos que las funciones f y g son derivable y definida en G, entonces las funciones $f+g$ y $f\cdot g$ son derivable en G. La función f/g es derivable en la región $\{a\epsilon G/g(a)\neq 0\}$.*

Las derivadas son:

i. $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

ii. $(fg)'(a)=f'(a)g'(a)+f'(a)g(a)$

iii. $\left({}^{f}/_{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g\prime(a)}{g^2(a)}$

Demostración,

$$(f+g)'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)+g(z)-f(a)-g(a)}{x-a}=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}+\lim_{z\to a}\frac{g(z)-g(a)}{z-a}$$

$$=f'(a)+g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{z \to a} \frac{f(z)g(z) - f(a)g(z) + f(a)g(z) - f(a)g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} g(z)$$

$$+ f(a) \lim_{z \to a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1/g(z) - 1/g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(a) - g(z)/g(a)g(z)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{g(a)g(z)} \frac{g(a) - g(z)}{x - a}$$

$$= -\frac{1}{g^2(a)} g'(a)$$

Así que $\left({}^{f}/_{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g\prime(a)}{g^2(a)}$

1.2.10 Reglas de la Cadena. *Si* f *y* g *son funciones derivable en* G *y* Ω *respectivamente y* $f(G) \subset \Omega$. *Entonces* $g \circ f$ *es derivable en* G *y* $(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big)f'(z)$, *para todo* $z \in G$.

Demostración. *Para un* $a \in G$ *elegimos un número positivo* r *tal que* $B(a;r) \subset G$. *Probaremos que si* $0 < h_n < r$ *y* $\lim h_n = 0$, *entonces* $\lim\limits_{h_n \to 0} \frac{g \circ f(a+h_n) - g \circ f(a)}{h_n}$ *existe y es igual a* $g'\big(f(a)\big) f'(a)$.

Supongamos primero que $f(a) \neq f(a+h_n)$ *para todo* n, *luego*

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{g \circ f(a+h_n) - g \circ f(a)}{h_n} = \lim_{h_n \to 0} \left[\frac{g \circ f(a+h_n) - g \circ f(a)}{f(a+h_n) - f(a)} \cdot \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}\right]$$

$$= \lim_{h_n \to 0} \frac{g \circ f(a+h_n) - g \circ f(a)}{f(a+h_n) - f(a)} \cdot \lim_{h_n \to 0} \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}$$

$= g'\big(f(a)\big) f'(a)$. *Gracias a la definición de* $g'\big(f(a)\big)$ *y* $f'(a)$ *y al hecho de que* $\lim\limits_{h_n \to 0} f(a+h_n) - f(a) = 0$ *por 1.2.4.*

Ahora supongamos que $f(a) = f(a+h_n)$ *para infinitos valores de* n. *Si* $\{h_n\}$ *la unión de dos sucesiones* $\{k_n\}$ *y* $\{l_n\}$ *donde* $f(a) \neq f(a+k_n)$ *y* $f(a) = f(a+l_n)$ *para todo* n. *Como* f *es diferenciable,*

$f'(a) = \lim\limits_{l_n \to 0} \frac{f(a+l_n) - f(a)}{l_n} = 0$. *Además* $\lim\limits_{l_n \to 0} \frac{g \circ f(a+l_n) - g \circ f(a)}{l_n} = 0$. *Por la primera suposición* $\lim\limits_{k_n \to 0} \frac{g \circ f(a+k_n) - g \circ f(a)}{k_n} = g'\big(f(a)\big) f'(a) = 0$. *Por lo tanto* $\lim\limits_{h_n \to 0} \frac{g \circ f(a+h_n) - g \circ f(a)}{h_n} = g'\big(f(a)\big) f'(a) = 0$, *lo que significa que*

$g \circ f$ *es derivable en* G *y* $(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big) f'(z)$, *para todo* $z \in G$.

1.3 Conexidad de los conjuntos

Intuitivamente, un conjunto $G \subseteq C$ *es conexo si es de una sola pieza. Sin embargo, la definición más razonable se puede expresar al decir que* G *es disconexo si existen abiertos* $A, B \subseteq C$ *tales que* $A \cap G \neq \emptyset$, $B \cap G \neq \emptyset$ *y se tiene que*

$$G = (A \cap G) \cup (B \cap G).$$

Decimos entonces que los conjuntos A *y* B *desconectan a* G *o que lo separan en dos piezas.*

No obstante de manera más rigurosa diremos que un conjunto G *se llama conexo si en cualquier división del mismo en dos subconjuntos no vacíos disjuntos (sin puntos comunes)* G_1 *y* G_2*, al menos uno de estos conjuntos contiene un punto de acumulación del otro conjunto.*

El conjunto vacío y el conjunto que consta de un solo punto se consideran conexos. Esto tiene su justificación, si se expresa la definición de conexidad en la siguiente forma negativa: un conjunto G *se llama conexo, si no existe una división del mismo en dos conjuntos no vacíos disjuntos* G_1 *y* G_2*, ninguno de los cuales contiene puntos de acumulación del otro. Puede servir* *de ejemplo de conjunto disconexo cualquier conjunto finito que consta de más de un punto.*

Una clase de conjuntos cerrados y conexos de suma importancia son los conjuntos de puntos pertenecientes a las curvas continuas.

Con respecto a cada función compleja $z = f(t)$ *de la variable real* t, *definida y continua en cierto segmento* $a \leq t \leq b$ *(es decir, los pares de funciones reales continuas* $x = x(t)$, $y = y(t)$, *se dice que esta define o determina una curva (una línea) continua en el plano complejo. En este caso, los valores de la función se llaman puntos de la curva; el conjunto de todos los valores de la función se llama conjunto de puntos de la curva.*

Ahora podemos demostrar que, en general, es conexo todo conjunto G *para el cual dos puntos cualquiera del mismo* z_1 *y* z_2 *se pueden unirse mediante una curva* l *(es decir, que se puede construir una curva para la cual uno de los puntos* z_1, z_2 *es el punto inicial, y el otro, el punto final), cuyos puntos pertenecen a* G.

1.3.1 Teorema *Un conjunto* G *es conexo si para dos puntos cualquiera* z_1, $z_2 \epsilon G$ *pueden unirse por una curva continua* l *contenida en* G.

Demostración. En efecto, supongamos que el conjunto G se ha dividido de algún modo en dos subconjunto no vacíos G_1 y G_2 que carecen de puntos comunes, Sea z_1 un punto fijo de G_1 y z_2, de G_2, Unamos z_1 y z_2 mediante una curva continua l cuyos puntos todos pertenezcan a G, y sean l_1 y l_2 los subconjuntos del conjunto de los puntos de la curva l formados por todos los puntos de l que pertenecen a G_1 o a G_2, respectivamente. Evidentemente, éstos son conjuntos no vacíos ($z_1 \epsilon\, l_1$, $z_2 \epsilon\, l_2$) que no tienen puntos comunes.

Como l es conexa, al menos uno de ellos, por ejemplo l_1, tiene que contener un punto de acumulación del otro. Sea z' este punto. Este pertenece a l_1 y, por consiguiente, a G_1. Además, es un punto de acumulación para l_2 y, por lo tanto, también es un punto de acumulación para $G_2 \supset l_2$.

Así, pues, resulta que cualquiera que sea la división del conjunto G en conjuntos no vacíos sin puntos comunes, al menos uno de ellos tiene que poseer un punto de acumulación del otro. Con esto queda demostrado que el conjunto G es conexo.

Como dos puntos cualesquiera del plano pueden unirse, por ejemplo, mediante un segmento recto, de aquí se deduce, en particular, que el plano es un conjunto conexo.

Para un conjunto cerrado y acotado, la condición de conexidad puede expresarse en la siguiente proposición.

***1.3.2 Proposición**. Un conjunto cerrado y acotado F es conexo, es decir, es un continuo, si para cualesquiera dos de sus puntos z_0 y z' y para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible señalar un número finito de puntos de este conjunto: $z_o,\ z_1, . . . , z_n = z'$, tales que $|z_k - z_{k-1}| < \varepsilon(k = 1, . . . , n)$*

Demostración. Supongamos que se cumple esta condición y que F es conexo, entonces F puede dividirse en dos subconjunto no vacíos F_1 y F_2, sin puntos comunes, tales que ninguno de ellos contiene puntos de acumulación del otro. Como todos los puntos de acumulación del subconjunto F_j $(j = 1,2)$ tiene que pertenecer a F, deducimos que éstos pertenecen a F_j , es decir, F_j es un conjunto cerrado. Así, pues, F_1 y F_2 son acotados, cerrado y carecen de puntos comunes.

Por lo tanto, la distancia $\rho(F_1\ ,\ F_2) > 0$; tomando un punto $z_0 \epsilon F_1$ y un punto $z' \epsilon F_2$ no podremos indicar, evidentemente, un número finito de puntos de F: $z_o,\ z_1, . . . , z_n = z'$, tales que $|z_k - z_{k-1}| < \rho(F_1\ ,\ F_2)$ $(k = 1, . . . , n)$. En efecto, entre éstos tiene que haber dos puntos con subíndices consecutivos: z_{k-1} y z_k, el primero de los cuales pertenece a F_1 y el *segundo a F_2, por lo cual $|z_k - z_{k-1}| \geq \rho(F_1\ ,\ F_2)$. De esta contradicción se deduce la proposición enunciada.*

1.3.3 Definición. *A los conjuntos $G \subseteq C$ que sean abierto y conexo se le conoce como región o recinto.*

En virtud de lo demostrado anteriormente, un conjunto abierto O será conexo y, por consiguiente, será una región, si dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una curva continua perteneciente al conjunto abierto O.

1.3.4 Proposición. *Sea z' y z'' dos puntos cualquiera de una región G arbitrario, entonces z' y z'' pueden unirse mediante una curva continua l perteneciente a la región.*

Demostración. Por reducción a lo absurdo, supongamos que en cierta región G dos puntos z' y z'' no pueden unirse mediante una curva continua l perteneciente a la región. Designemos entonces mediante G_1 el conjunto de aquellos puntos de G que pueden unirse con z' mediante una curva continua perteneciente a G, y mediante G_2, el conjunto de todos los demás puntos.

Como z' *pertenece a* G *junto con cierto entorno suyo* $|z - z'| < \rho$ *(según la definición de conjunto abierto), todos los puntos de este entorno quedarán incluido en* G_1*: éstos pueden unirse con* z' *mediante segmentos rectos, Por lo tanto,* G_1 *y* G_2 *son conjuntos no vacíos* $(z'' \epsilon\, G_2,)$ *que no tiene puntos comunes. Supongamos que* $z_1 \epsilon\, G_1$*; entonces existe una curva continua* l_1 *que une* z' *con* z_1 *y pertenece a* G*. Si* $|z - z_1| < \rho_1$ *es un entorno del punto* z_1*, perteneciente a* G*, entonces cualquier punto z de este entorno puede unirse con* z_1 *mediante un segmento recto* Δ_1*, también perteneciente a* G*.*

Por consiguiente, tal punto se une con z' *mediante una curva continua* $l_1 + \Delta_1$*, perteneciente a* G*; así, pues, z* $\epsilon\, G_1$*, es decir, el entorno* $|z - z_1| < \rho_1$ *del punto* z_1 *pertenece totalmente a* G_1*. Vemos que el punto* z_1 *no puede ser de acumulación para el conjunto* G_2*.*

Supongamos, finalmente, que $z_2 \epsilon\, G_2$*; entonces tomamos de nuevo un entorno* $|z - z_2| < \rho_2$ *del punto* z_2*, perteneciente a* G*. Si algún punto z de este entorno pertenece a* G_1*, entonces este punto podría unirse con el punto* z' *mediante una curva continua* l_2*, perteneciente a* G*; pero z puede unirse con* z_2 *mediante un segmento recto* Δ_2*, también perteneciente al recinto* G*. Por consiguiente, el punto* z_2 *se uniría con el punto* z' *mediante una curva continua*

$l_2 + \Delta_2$, perteneciente a G, por lo cual pertenecería a G_1 en contra de la hipótesis ($z_2 \epsilon G_2$).

Así, pues, ningún punto del entorno $|z - z_2| < \rho_2$ puede pertenecer al conjunto G_1. Por lo tanto, ningún punto del conjunto G_2 puede ser de acumulación para G_1. Veamos que el conjunto G se divide en dos conjuntos no vacíos G_1 y G_2 sin puntos comunes, ninguno de los cuales contiene puntos de acumulación del otro. Pero esto contradice a la condición de conexidad del conjunto G. Así queda demostrada la proposición.

Un conjunto abierto G se denomina región, si dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una curva continua l cuyos puntos todos pertenecen a G.

Sea G un conjunto abierto arbitrario y z_0, algún de sus puntos, consideremos el conjunto de todos los puntos de G que pueden unirse con z_0 mediante curvas continuas, perteneciente a G. Evidentemente, este conjunto no es vacío (pertenece al mismo el punto z_0 junto con su entorno, perteneciente a G), es abierto (si z_1 puede unirse con z_0 mediante una curva continua γ, entonces cualquier punto z del entorno del punto z_1, perteneciente a G, puede unirse con z_0 mediante una curva continua, constituida por γ y por el segmento rectilíneo con los extremos z_1 y z_2) y, según la definición misma, *es conexo. Por lo tanto, el conjunto indicado es una región. Esta región se llama componente conexa de* G *(que contiene al punto* z_0*)*

Si G *es un abierto no vacío, se llama componente conexa de* G *a una región contenida en* G *maximal. Si* G *es conexo él es su única componente conexa. Si* G *es no conexo entonces es unión de una cantidad (que puede ser infinita) de componentes conexas.*

1.3.5 Teorema. *Sea* $f: G \to C$ *una función continua. Si* G *es conexo, entonces* $f(G)$ *también es conexo.*

Demostración. Supongamos que $V \subseteq f(G)$ *es abierto y cerrado en* $f(G)$ *y que* $V \neq \emptyset$. *Entonces ,* $f^{-1}V \neq \emptyset$ *y* $f^{-1}V$ *es abierto y cerrado en el conexo* G *porque* f *es continua. Se sigue que* $f^{-1}V = G$ *y así* $V = f(G)$ *y por lo tanto* $f(G)$ *es conexo.*

Capítulo 2

Integral de Riemann-Stieltjes e Integral de Línea

En este capítulo presentamos la teoría básica de la integral de línea para funciones de variable compleja. Iniciando con el concepto de caminos, después describimos las nociones de funciones de variación acotadas y curvas rectificables para desarrollar la integral de Riemann- Stieltjes y definir la integral de línea de una función de variables complejas.

2.1. Caminos

Un camino en una región $G \subseteq C$ *es una función continua* $\gamma: [a, b] \to G$ *donde* $[a, b] \subseteq R$ *es un intervalo cerrado con* $a < b$. *Al punto* $\gamma(a)$ *se le llama el extremo inicial de* γ *y al punto* $\gamma(b)$ *se le llama el extremo final de* γ.

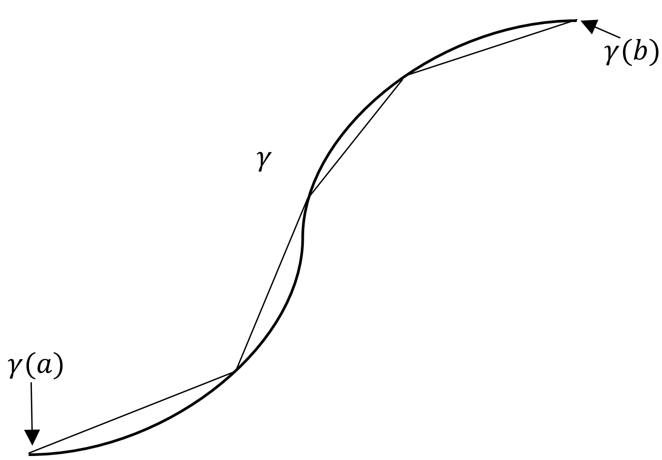
Si para $\gamma: [a, b] \to G$ *tenemos que* $\gamma(a) = \gamma(b)$ *se dice que* γ *es un camino cerrado. Una clase particular de caminos son los caminos suaves. Una camino* γ *se llama suave, si* $\gamma'(t)$ *existe para cada* t *en* $[a, b]$ *y* $\gamma': [a, b] \to G$ *es continua y diferente de cero en todo* $[a, b]$. *Una clase más general de* *caminos, son los caminos suaves por tramos. Una camino γ se llama suave por tramo si hay una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < . . . < t_m = b$ tal que γ es suave en cada sub-íntralo $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq m$, en cada uno de los cuales γ posee derivada continua y diferente de cero.*

2.1.1 Caminos de Variación Acotada

Si $\gamma: [a, b] \to G$ es un camino, a cada partición del segmento $[a, b]$ en segmentos parciales

$$[t_{k-1}, t_k],\ (k = 1, 2, . . . , m);\ a = t_0 < t_1 < . . . < t_m = b$$

le corresponde una partición de la función γ en arcos parciales con los puntos iniciales $\gamma(t_{k-1})$ y los puntos finales $\gamma(t_k)$; el punto final de cada arco (a excepción del último) coincide con el punto inicial del arco que le sigue. Si unimos los puntos $\gamma(t_o)$, $\gamma(t_1)$, . . . , $\gamma(t_m)$ en su orden mediante segmentos rectilíneos, obtenemos una poligonal Λ inscrita en la función γ.



Los lados de esta poligonal son cuerdas de los arcos. Evidentemente la longitud o variación de la poligonal Λ *es* $\sum_{k=1}^{m}|\gamma(t_k) - \Upsilon(t_{k-1})|$. γ *será de variación acotada si existe una constante* $M > 0$ *tal que para una partición P del segmento* $[a, b]$ *se tiene que,*

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=1}^{m}|\gamma(t_k) - \Upsilon(t_{k-1})| \leq M.$$

La longitud total de γ, *esta definida por:*

$$l(\gamma) = sup\{v(\gamma; P): P\ una\ partición\ de\ [a, b]\}$$

El camino γ *se dirá que es rectificable si* $l(\gamma) \leq M$. *Si existen particiones de* $[a, b]$ *para los cuales la sumas de las longitudes de las poligonal inscrita a* γ, *son arbitrariamente grande, se dice que* γ *no es rectificable.*

Sea γ *un camino rectificable y* $f: [a, b] \to C$ *una función definida y continua en* γ. *Consideremos alguna partición del camino* γ *en arcos* σ_{k-1} *con los extremos* $\gamma(t_{k-1}) = z_{k-1}$ *y* $\gamma(t_k) = z_k$, *si tomamos a* $\varphi_{k-1} = \gamma(\tau_{k-1})$ *con* $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$, *formemos para* f *la suma integral*

$$S = \sum_{k=1}^{m} f(\varphi_{k-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Cada término de esta suma es el producto del valor de f en cierto punto φ_{k-1} del arco σ_{k-1} por la diferencia de los afijos de los puntos iniciales y finales del arco σ_{k-1} .

Como la función f es continua y el camino γ es rectificable, la suma integral indicada tiende hacia un límite determinado. Llamaremos integral de la función f a lo largo del camino γ a:

$$lim \sum_{k=1}^{m} f(\varphi_{k-1})(z_k - z_{k-1})$$

el cual designaremos por $\int_{\gamma} f(z)dz$.

***2.1.2 Ejemplos**.*

a) $\int_{\gamma} dz = lim \sum_{k=1}^{m}(z_k - z_{k-1})) = lim(z_m - z_0) = \omega - \beta$, donde $\beta = \gamma(a)$ es el punto inicial y $\omega = \gamma(b)$, el punto final del camino γ. En particular, si γ es cerrada, entonces $\omega = \beta$ y la integral se anula:

$$\int_{\gamma} dz = 0$$

b) $\int_{\gamma} zdz = lim \sum_{k=1}^{m} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}) = lim \sum_{k=1}^{m} z_k(z_k - z_{k-1})$

Aquí, para una misma partición del camino γ supondremos una vez que el punto φ_{k-1} coincide con el punto inicial z_{k-1} del arco σ_{k-1} y la otra vez, *con el punto final z_k del mismo arco , como los límites de una y otra sumas integrales son iguales, su media aritmética tendrá el mismo límite.*

$$\int_\gamma zdz = \frac{1}{2} lim \sum_{k=1}^{m}(z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1})$$

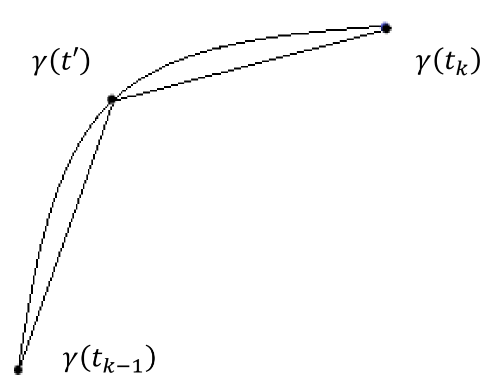
$$= \frac{1}{2} lim \sum_{k=1}^{m}((z_k)^2 - (z_{k-1})^2)$$

$$= \frac{1}{2} lim((z_m)^2 - (z_0)^2) = \frac{1}{2}(\omega^2 - \beta^2),$$

en particular, si γ es una curva cerrada, obtenemos $\int_\gamma dz = 0$.

Si P y Q son dos particiones de $[a,b]$ y $P \subseteq Q$, si decimos que Q refina a P tenemos que $v(\gamma;P) \leq v(\gamma;Q)$.

En efecto si $P = \{a = t_0 < t_1 < \ . \ . \ . < t_{k-1} < t_k = b\}$ es una partición de $\gamma: [a,b] \to G$ y supongamos que la partición Q contiene un punto más que P, digamos $t' \epsilon [t_{k-1}, t_k]$, entonces , la poligonal asociada a Q tiene dos arcos más que la poligonal asociada a P definidos por $\gamma(t_{k-1}), \gamma(t'), \gamma(t_k)$,



Así, $v(\gamma, P) = \sum_{j\neq k}\left|\gamma\left(t_j\right) - \gamma(t_{j-1})\right| + |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$

$$\leq \sum_{j\neq k}\left|\gamma\left(t_j\right) - \Upsilon(t_{j-1})\right| + |\gamma(t_k) - \gamma(t')| + |\gamma(t') - \Upsilon(t_{k-1})|$$

$$= v(\gamma; Q)$$

2.1.3 Lema. *Si* $\gamma, \lambda: [a, b] \to C$ *son rectificables y* $\alpha, \beta \in C$, *entonces*

$\alpha\gamma + \beta\lambda: [a, b] \to C$ *dada por* $(\alpha\gamma + \beta\lambda)(t) = \alpha\gamma(t) + \beta\lambda(t)$ *es rectificable y* $l(\alpha\gamma + \beta\lambda) \leq |\alpha| l(\gamma) + |\beta| l(\lambda)$

Demostración. Supongamos que $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$, *entonces*

$$v(\alpha\gamma + \beta\lambda) = \sum_{k=1}^{m}|(\alpha\gamma + \beta\lambda)(t_k) - (\alpha\gamma + \beta\lambda)(t_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{m}|\alpha\gamma(t_k) - \alpha\gamma(t_{k-1}) + \beta\lambda(t_k) - \beta\lambda(t_{k-1})|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}|\alpha\gamma(t_k) - \alpha\gamma(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{m}|\beta\lambda(t_k) - \beta\lambda(t_{k-1})|$$

$$= |\alpha| v(\lambda; P) + |\beta| v(\lambda; P).$$

2.1.4 Proposición. *Si* $\lambda: [a, b] \to C$ *es suaves por tramos, entonces es rectificable y* $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Demostración. Asumamos que λ es suaves en $[a,b]$, lo cual significa que λ' existe y es continua en $[a,b]$. Si $P=\{a=t_0<t_1<...<t_m=b\}$ es una partición de $[a,b]$,

$$v(\gamma;P)=\sum_{k=1}^{m}|\gamma(t_k)-\Upsilon(t_{k-1})|=\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma'(t)dt\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|\gamma'(t)dt|=\int_a^b|\gamma'(t)|dt,$$

donde en la segunda igualdad usamos el teorema fundamental del cálculo. La desigualdad anterior implica que $l(\gamma)\leq\int_a^b|\gamma'(t)|dt\quad *$, por lo que γ es rectificable. Ahora, como γ' es continua en el compacto $[a,b]$, entonces es uniformemente continua y así, para $\varepsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que $|s-t|<\delta_1$ implica que $|\gamma'(s)-\Upsilon'(t)|<\varepsilon$. Sea $\delta_2>0$ tal que la norma de la partición $\|P\|:=máx_{1<k<m}\{|t_k-t_{k-1}|\}<\delta_2$, entonces,

$\left|\int_a^b|\gamma'(t)|dt-\sum_{k=1}^{m}|\gamma'(\tau_k)|(t_k-t_{k-1})\right|<\varepsilon$, con τ_k cualquier punto en $[t_{k-1}-t_k]$. Se sigue que:

$$\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt\leq\varepsilon+\sum_{k=1}^{m}|\gamma'(\tau_k)|(t_k,t_{k-1})=\varepsilon+\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma'(\tau_k)dt\right|$$

(porque $\gamma'(\tau_k)$ es constante)

$$\leq\ \varepsilon+\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[\gamma'(\tau_k)-\gamma'(t)]dt\right|+\sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma'(t)dt\right|$$

(por la desigualdad del triángulo),

y si $\|P\| < \delta = mín\{\delta_1, \delta_2\}$, *entonces* $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \varepsilon$ *para* $t \in [t_{k-1} - t_k]$, *y por el teorema fundamental del cálculo,*

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon(t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

$$= \varepsilon + \varepsilon(b-a) + v(\gamma; P) \leq \varepsilon(1 + b - a) + l(\gamma),$$

haciendo $\varepsilon \to 0^+$ *tenemos* $\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq l(\gamma)$ $**$

Por las desigualdades $*$ *y* $**$ *tenemos* $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

2.2 Integral de Riemann- Stieltjes

Esta integral es una generalización de la integral de Riemann y fue publicada en 1894 por Thomas Joannes Stieltjes. Esta integral depende de dos funciones, el integrando f *y una función* γ *llamada integrador.*

Consideremos una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ *del intervalo* $[a, b]$ *para un camino* $\gamma: [a, b] \to C$ *y una función continua* $f: [a, b] \to C$, *diremos que la suma de Riemann-Stieljes con respecto a las funciones* f *y* γ *es:*

$$S(f, \gamma; P) = \sum_{k=1}^{m} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] ,$$

para cualquiera elección de τ_k *en* $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$, *y consideremos esta suma cuando* $\|P\| \to 0$. *Diremos que* f *es Riemann-Stieljes integrable a lo largo de* γ *si existe un complejo* $I \epsilon C$ *con la propiedad de que para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *talque si* $\|P\| < \delta$ *entonces,*

$$|S(f,\gamma;P) - I| < \varepsilon$$

Se dice entonces que I *es la integral de* f *a lo largo de* λ *o que* I *es la integral de Riemann-Stieljes de* f *con respecto a* λ *sobre* $[a,b]$ *y es designado por el símbolo*

$$I = \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t) d\gamma(t).$$

2.2.1 Teorema. *Si* $\gamma: [a,b] \to G$ *es rectificable y* $f: [a,b] \to C$ *es continua entonces la integral de Riemann-Stieljes* $\int_a^b f(t) d\gamma(t)$ *existe.*

Demostración. Como $f: [a,b] \to C$ *es continua, entonces en uniformemente continua y así inductivamente, para* ε *de la forma* $1/m$ *con* $m \epsilon N$, *existe* $\delta_1 > \delta_2 > \ldots$ *tales que* $|s-t| < \delta_m$ *implica que* $|f(s) - f(t)| < {}^1\!/_m$.

Para cada $m \epsilon N$ *pongamos;*

$$P_m = \{partición\ P\ de[a,b]\ tales\ que\ \|P\| < \delta_m\},$$

así $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots$ *y si ponemos*

$$F_m = cerradura\ de\ \{\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]:$$

$$P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}\, \epsilon\, P_m \;\; con \;\; t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k,$$

entonces, (i) $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq . . .$ *y (ii) diám* $F_m \leq \frac{2}{m} l(\gamma)$

Nótese que una vez que se hayan probado (i) y (ii), por el teorema (Cantor) 1.1.9 existe un único número complejo $I\, \epsilon \cap F_m$ *y este complejo I satisface que si* $\varepsilon > 0$, *escogiendo un* m *tal que* $\varepsilon > \left(\frac{2}{m} l(\gamma)\right) \geq$ *diám* F_m, *como* $I \epsilon F_m$ *se sigue que* $F_m \subseteq B(I; \varepsilon)$. *Por lo tanto, escogiendo* $\delta = \delta_m$, *para toda partición P tal que* $\|P\| < \delta_m$, *la suma de Riemann-Stieljes* $S(f, \gamma; P) \epsilon F_m \subseteq B(I; \varepsilon)$ *y así* $|S(f, \gamma, P) - I| < \varepsilon$, *como se quería. Basta entonces probar (i) y (ii). Comenzamos notando que (i) es directo del hecho de que* $P_1 \supseteq P_2 \supseteq . . .$ *Para (ii), como*

$$diám F_m = diám\{\textstyle\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] :$$

$$P = \{t_0, \ldots, t_n\} \epsilon P_m, \tau_k \epsilon [t_{k-1}, t_k]\},$$

basta mostrar que este último diámetro es $\leq \left(\frac{2}{m} l(\gamma)\right)$.

Tomemos a $P, Q\, \epsilon\, P_m$ *tales que* $P \subseteq Q$, *mostraremos que*

$$|S(p) - S(Q)| < \frac{1}{m}\, l(\gamma), \quad (iii)$$

basta considerar el caso cuando Q *tiene un único punto* t' *más que* P, *digamos* $Q = \{a = t_0 < . . . < t_{j-1} < t' < . . . < t_n = b$ *y* $P = \{ a = t_0 < . . . < t_n = b\}$, *entonces:*

$$S(Q) = \textstyle\sum_{k \neq j} f(\Im_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] + f(\tau')\big[\gamma(t') - \gamma\big(t_{j-1}\big)\big] +$$

$f(\tau'')[\gamma(t_k) - \gamma(t')]$ *donde* $\Im_k \epsilon [t_{k-1} - t_k]$ *si* $k \neq j$, $\tau' \epsilon [t', t_{k-1}]$ *y* $\tau'' \epsilon [t', t_k]$. *Similarmente, escribiendo*

$$S(P) = \sum_{k\neq j} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] + f(\tau_j)[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]$$

con $\tau_k \epsilon [t_{k-1} - t_k]$, *se sigue que*

$$|S(P) - S(Q)| = \left|\sum_{k\neq j}[f(\tau_k) - f(\Im_k)][\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] + \right.$$

$$f(\tau_j)[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] - f(\tau')[\gamma(t') - \gamma(t_{j-1})] -$$

$$f(\tau'')[\gamma(t_j) - \gamma(t')]|$$

(y como $P \epsilon P_m$, *entonces* $|\tau_k - \Im_k| < \delta_m$ *y así* $|f(\tau_k) - f(\Im)| < i/m$*)*

$$\leq \frac{1}{m}\sum_{k\neq j}|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| +$$

$$|[f(\tau_j) - f(\tau')][\gamma(t') - \gamma(t_{j-1})] +$$

$$[f(\tau_j) - f(\tau'')[\gamma(t_j) - \gamma(t')]]|$$

$$\leq \frac{1}{m}\sum_{k\neq j}|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| +$$

$$\frac{1}{m}|\gamma(t') - \gamma(t_{j-1})| + \frac{1}{m}\gamma(t_j) - \gamma(t')|$$

(porque $|\tau_j - \tau'| < \delta_m$ *y* $|\tau_j - \tau''| < \delta_m$ *)*

$$= \frac{1}{m}v(\gamma; Q) \leq \frac{1}{m}l(\gamma)$$

Finalmente, observe que si $P, R \epsilon P_{m,}$ *entonces* $Q \coloneqq P \cup R$ *refina a* P *y* R, *y además* $\|Q\| \leq \|P\|$ *y* $\|Q\| \leq \|R\|$ *por lo que* $\|Q\| \leq \delta_m$ *y consecuentemente* $Q \epsilon P_m$. *Por (iii) se sigue que,*

$$\begin{aligned} |S(P) - S(R)| &= |S(P) - S(Q) + S(Q) - S(R)| \\ &\leq |S(P) - S(Q)| + |S(Q) - S(R) \\ &\leq \frac{1}{m} l(\gamma) + \frac{1}{m} l(\gamma) = \frac{2}{m} l(\gamma)\ , \end{aligned}$$

es decir, en el cuya cerradura define F_m *la distancia entre cualesquiera dos de sus elementos es* $\leq \frac{2}{m} l(\gamma)$, *lo cual prueba (ii).*

Los siguientes resultados muestra la aditividad de la integral Riemann-Stieljes.

2.2.2 Proposición. *Sea* $\gamma: [a, b] \to C$ *un camino rectificables y* $f, g: [a, b] \to C$ *dos funciones continuas, entonces*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) d\gamma = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b g d\gamma,$$

Para cualesquiera que sean $\alpha, \beta \epsilon C$.

Demostración. Sea $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *una partición de* $[a\ , b]$ *y* $\tau_k \epsilon [t_{k-1}, t_k]$, *entonces*

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g) d\gamma &= \lim_{\|P\| \to 0} \{\textstyle\sum_{k=1}^n (\alpha f + \beta g)(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\} \\ &= \alpha \lim_{\|P\| \to 0} \{\textstyle\sum_{k=1}^n f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\} \end{aligned}$$

$$+\beta \lim_{\|P\|\to 0}\{\sum_{k=1}^{n} g(\tau_k)[\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})]\}$$

$$= \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b g d\gamma \,.$$

2.2.3 Proposición. *Sean* $\gamma, \lambda: [a,b] \to C$ *dos caminos rectificables y* $f: [a,b] \to C$ *una función continuas, entonces*

$\int_a^b f d(\alpha\gamma + \beta\lambda) = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b f d\lambda$, *para cualesquiera sean* $\alpha, \beta \in C$.

Demostración. Sea $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *una partición de* $[a\,, b]$ *y* $\tau_k \epsilon [t_{k-1}, t_k]$, *entonces*

$$\int_a^b f d(\alpha\gamma + \beta\lambda) = \lim_{\|P\|\to 0}\{\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)[(\alpha\big(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\big)$$

$$+\beta(\lambda(t_k) \quad -\lambda(t_{k-1})]\}$$

$$= \alpha \lim_{\|P\|\to 0}\{\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\big(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\big)\}$$

$$+\beta \lim_{\|P\|\to 0}\{\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\big(\lambda(t_k) \quad -\lambda(t_{k-1})\big)\}$$

$$= \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b f d\lambda$$

2.2.4 Teorema. *Si* $\gamma: [a,b] \to C$ *es suave por tramos y* $f: [a,b] \to C$ *es continua, entonces* $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt$.

Demostración. Consideremos el caso donde γ *es suaves. Ahora, escribir* $\gamma = u + iv$, *donde* $u, v: [a\ , b] \rightarrow R$, *por la proposición 2.2.3 se tiene que* $\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d(u + iv) = \int_a^b f du + i \int_a^b f dv$,

y como $\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t)$, *entonces*

$$\int_a^b f(t)\gamma'(t)dt = \int_a^b f(t)u'(t)dt + i \int_a^b f(t)v'(t)dt$$

por lo que basta probar que

$$\int_a^b f du = \int_a^b f(t)u'(t)dt \quad y \quad \int_a^b f dv = \int_a^b f(t)v'(t)dt.$$

Lo haremos para u, *porque para* v *es lo mismo.*

Sea $\varepsilon > 0$ *arbitrario y escojamos un* $\delta > 0$ *y una partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *tal que* $\|P\| < \delta$. *Entonces, para* $\tau_k \epsilon [t_k - t_{k-1}]$ *arbitrario se tiene que*

$$\left| \int_a^b f du - \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \left[u(t_k) - u(t_{k-1)} \right] \right| < \varepsilon/2 \qquad (i),$$

y, por definición de integral de Riemann de la función $f(t)u'(t)$ *en* $[a\ , b]$

$$\left| \int_a^b f(t)u'(t)dt - \sum_{k=1}^n f(\tau_k)u'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon/2 \qquad (ii),$$

ahora, por el teorema del valor medio del cálculo diferencial aplicado a la función diferencial $u: [a, b] \rightarrow R$, *en el intervalo* $[t_k - t_{k-1}]$ *existe un elemento* τ_k *tal que*

$$u'(\tau_k) = \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \qquad (iii)$$

(y estamos escogiendo los τ_k usados en (i) y (ii) como estos τ_k). Substituyendo (iii) en (ii) notamos que la suma en (ii) queda igual que la suma en (i). Si denotamos esta suma por $S(P)$, se sigue que

$$\left|\int_a^b f du - \int_a^b f(t)u'(t)dt\right| = \left|\left(\int_a^b f du - S(P)\right) - \left(\int_a^b f(t)u'(t)dt - S(P)\right)\right|$$

$$\leq \left|\int_a^b f du - S(P)\right| + \left|\int_a^b f(t)u'(t)dt - S(P)\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

Esto demuestra que cuando γ es suave por tramos, la integral de Riemann-Stieljes se puede calcular como una integral compleja de variable real.

Una de las propiedades elementales de las integrales de las funciones complejas es $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_m} f(z)dz$, aquí, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ son arcos que se obtienen al hacer alguna partición del camino γ en partes; el origen del arco γ_1, coincide con el origen de la curva γ, el origen del arco γ_{k+1} con el extremo final del arco γ_k $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ y el extremo final del arco γ_k con el extremo final del arco γ.

2.3 Integral de Línea

Si $\gamma: [a, b] \to G$ es un camino entonces el conjunto $\{\gamma(t): a \leq t \leq b\}$ es llamado la traza de γ y es denotado por $\{\gamma\}$. Nótese que la traza de un camino siempre es un conjunto compacto.

***2.3.1 Definición**. Si $\gamma: [a,b] \to G$ es un camino rectificable y $f: G \to C$ es una función continua y definida sobre la traza de γ, considerando la composición $f \circ \gamma: [a,b] \to C$, a la integral de Riemann-Stieljes*

$$\int_a^b (f \circ \gamma) d\gamma = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) d\gamma(t) = \int_a^b f(\gamma(t)) d\gamma(t),$$

se le llama la integral de línea de f a lo largo de γ, y se denota por:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z) d(z).$$

Por el teorema 2.2.4, en el caso cuando $\gamma: [a,b] \to G$ es suave por tramos, la integral de línea se puede calcular como una integral de Riemann de una función compleja de variable real: $\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) d(t)$.

***2.3.2 Ejemplo**. Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ donde $\gamma: z = a + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi,$ es una circunferencia con centro en a y de radio r.*

Calculemos. Si $z = \gamma(t) = a + re^{it}$ entonces $\gamma'(t) = ire^{it}$ y , por consiguiente $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$

2.3.3 Re-parametrización de Caminos.

Si $\gamma: [a,b] \to C$ y $\beta: [c,d] \to C$ son dos caminos rectificables, diremos que γ es una reparametrización de β si existe una función continua *estrictamente creciente* $\varphi: [a, b] \to [c, d]$ *con* $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ *tal que* $\gamma = \beta \circ \varphi$. *A la función* φ *se le llama un cambio de parámetro o re-parametrización. Es claro que la imagen de* γ *es la misma que la imagen de* β.

Una curva es una clase de equivalencia de caminos. La traza de una curva es la traza de alguno de sus miembros. Si f *es continua sobre la traza de la curva entonces la integral de* f *sobre la curva es la integral de* f *sobre algún miembro de la curva. Una curva es suave o suave por tramos si uno de sus representantes lo es. Una curva es cerrada si sus representantes son caminos cerrados, esto quiere decir que en una curva cerrada* $\gamma: [a, b] \to C$ *se observa que* $\gamma(a) = \gamma(b)$. *Observe también que si* β *es rectificable y* γ *es una reparametrización de* β, *entonces* γ *es también rectificable.*

En efecto, si $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *es una partición de* $[a\ , b]$, *entonces* $c = \varphi(a) = \varphi(t_0) < \varphi(t_1) < . . . < \varphi(t_n) = \varphi(b) = d$ *es una partición* $[c\ , d]$ *y se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\beta(\varphi(t_k)) - \beta(\varphi(t_{k-1}))| \leq l(\beta),$$

por lo que $l(\gamma) \leq l(\beta) < \infty$. *Se sigue que si* $\beta: [c, d] \to G$ *es rectificable y* $\gamma: [a, b] \to G$ *es una re-parametrización* $\gamma = \beta \circ \varphi$, *y si* $f: G \to C$ *es continua en la imagen de* β *(que es la misma a la imagen de* γ*), entonces las integrales de línea* $\int_\gamma f$ *y* $\int_\beta f$ *están definidas.*

2.3.4 Proposición. *Si* $\beta: [c, d] \to G$ *es rectificable y* $\gamma: [a, b] \to G$ *es una parametrización* $\gamma = \beta \circ \varphi$. *Si* $f: G \to C$ *es continua en la imagen de* β*(que es igual a la imagen de* γ*), entonces*

$$\int_\gamma f = \int_\beta f.$$

Demostración. *La partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *induce una partición* $\varphi(P) = \{c = \varphi(t_0) < . . . < \varphi(t_n) = b\}$ *de* $[c\,, d]$, *y recíprocamente. Por definición de integral de línea, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta_1 > 0$ *tal que si* $\|P\| < \delta_1$ *se tiene*

$$\left|\int_{\gamma=\beta\circ\varphi} f - \sum_{k=1}^{n} f(\beta \circ \varphi(\tau_k))[\beta \circ \varphi(t_k) - \beta \circ \varphi(t_{k-1})]\right| < \varepsilon/2 \qquad (i)$$

para $\tau_k \epsilon [t_{k-1}, t_k]$. *Similarmente, existe un* $\delta_2 > 0$ *tal que si* $\|\varphi(P)\| < \delta_2$ *se tiene que:*

$$\left|\int_\beta f - \sum_{k=1}^{n} f(\beta(\varphi(\tau'_k)))[\beta(\varphi(t_k)) - \beta(\varphi(t_{k-1}))]\right| < \varepsilon/2 \qquad (ii)$$

Para $\varphi(\tau'_k)\epsilon[\varphi(t_{k-1}),\ \varphi(t_k)]$ *con* $\tau'_k \epsilon [t_{k-1}, t_k]$.

Ahora, como φ *es uniformemente continuo, para el* $\delta_2 > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $\|P\| < \delta$, *se tiene que* $|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| < \delta_2$ *para todos los* t_j *y así* $\|\varphi(P)\| < \delta_2$. *Escogemos entonces un* $\delta < \delta_1$ *para que se satisfagan (i) y (ii) y además escogemos* $\tau_k = \tau'_k$ *en (i) y (ii) por lo que las sumas en (i) y (ii) son iguales y las podemos denotar por* $S(P)$. *Se sigue que*

$$\left|\int_{\gamma=\beta\circ\varphi} f - \int_\beta f\right| = \left|\int_{\gamma=\beta\circ\varphi} f - S(P) + S(P) - \int_\beta f\right|$$

$$\leq \left|\int_{\gamma=\beta\circ\varphi} f - S(P)\right| + \left|\int_{\beta}\ f - S(P)\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2.3.5 Definición. *Si* $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ *es un curva rectificable, se define la curva* $\gamma^{-1}: [-b\ , -a] \rightarrow G$ *mediante* $\gamma^{-1} = \gamma(-t)$. *Así* γ^{-1} *recorre la misma curva que* γ, *pero en sentido opuesto. Otra notación para esto es* $-\Upsilon$.

2.3.6 Proposición. *Si* $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ *es una curva rectificable y* $f: G \rightarrow C$ *una función continua en* $\{\gamma\}$ *entonces:*

i. $\int_{\gamma^{-1}} f = -\int_{\gamma}\ f$

ii. $\left|\int_{\gamma}\ f\right| \leq l(\gamma) sup\{|f(z)|: z\epsilon\{\gamma\} = imagen\ de\ \gamma\ \}$

Demostración.

i. Si $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *es una partición de* $[a, b]$, *entonces* $-P = \{-b = -t_n < . . . < -t_0 = -a\}$ *es una partición de* $[-b, -a]$, $\|-P\| = \|P\|$. *También* $\tau_k \epsilon [t_{k-1}, t_k]$ *si solo si* $-\tau_k \epsilon [-t_k, -t_{k-1}]$, *Así;*

$$\int_{\gamma}\ f = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_k)\big)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma^{-1}(-\tau_k)\big)[\gamma^{-1}(-t_k) - \gamma^{-1}(-t_{k-1})]$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma^{-1}(-\tau_k)\big)(-1)[\gamma^{-1}(-t_{k-1}) - \gamma^{-1}(-t_k)]$$

$$= -\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma^{-1}(-\tau_k)\big)[\gamma^{-1}(-t_k) - \gamma^{-1}(-t_{k-1})]$$

$$= -\int_{\gamma} f$$

ii. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ con $\|P\| < \delta$ se tiene que,

$$\left|\int_{\gamma} f - \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_k)\big)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\right| < \varepsilon$$

y, por lo tanto

$$\left|\int_{\gamma} f\right| \le \varepsilon + \left|\sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_k)\big)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\right|$$

$$\le \varepsilon + \sum_{k=1}^{n}\left|f\big(\gamma(\tau_k)\big)\right| |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

$$\le \varepsilon + M\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

$$\le \varepsilon + Ml(\gamma)$$

donde $M = sup\{|f(z)|: z\epsilon\{\gamma\} = imagen\ de\ \gamma\ \} = sup$

***2.3.7 Lema**. Si $G \subseteq C$ es un abierto, $\gamma: [a, b] \to G$ es rectificable y $f: G \to C$ una función continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un camino poligonal Γ_ε in G tal que*

i. $\Gamma_\varepsilon(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_\varepsilon(b) = \gamma(b)$.

ii. $\left|\int_{\gamma} f - \int_{\Gamma_\varepsilon} f\right| < \varepsilon$.

Demostración. Consideremos primero el caso especial cuando $G = B(c;r)$ *es un disco abierto. Como* $\{\gamma\} \subseteq B(c;r)$ *y* $\{\gamma\}$ *es compacto, entonces* $d = dist(\{\gamma\}, \partial G) > 0$. *Se sigue que* $\{\gamma\} \subseteq B(c;p)$ *con* $p = r - \frac{d}{2}$*, y como* f *es continua en* $G = B(c;r)$*, lo es en el compacto* $\overline{B}(c;p)$ *y por lo tanto es uniformemente continua en esta bola cerrada. Así, para todo* $\varepsilon > 0$ *tal que* $|z - w| < \delta$ *implica que* $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. *Para este* δ*, como* $\gamma: [a,b] \to G$ *es uniformemente continua, existe una partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *tal que*

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| < \frac{\delta}{2} \qquad \textit{(i)}$$

si $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$. *Además, para* $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ *se tiene que*

$$\left| \int_\gamma f - \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_k)\big)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \varepsilon \qquad \textit{(ii)},$$

se define entonces $\Gamma_\varepsilon: [a\,, b] \to G$ *mediante*

$$\Gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{t_k - t_{k-1}}[(t_k - t)\gamma(t_{k-1}) + (t - t_{k-1})\gamma(t_k)]$$

si $t \in [t_{k-1}, t_k]$. *Es decir, en el subintervalo* $[t_{k-1}, t_k]$ *de* $[a,b]$, Γ_ε *es el segmento de recta que une el punto* $\gamma(t_{k-1})$ *con* $\gamma(t_k)$ *y por lo tanto* Γ_ε *es un poligonal en* G.

Usando (i) se tiene que si $\tau_k\,, t \in [t_{k-1}, t_k]$*, entonces*

$$|\gamma(\tau_k) - \Gamma_\varepsilon(t)| < \delta \qquad \textit{(iii)}$$

ya que

$$|\gamma(\tau_k) - \Gamma_\varepsilon(t)| = \left|\gamma(\tau_k) - \frac{1}{t_k - t_{k-1}}[(t_k - t)\gamma(t_{k-1}) + (t - t_{k-1})\gamma(t_k)]\right|$$

$$= \frac{|\gamma(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) - (t_k - t)\gamma(t_{k-1}) - (t - t_{k-1})\gamma(t_k)|}{t_k - t_{k-1}}$$

$$= \frac{\left|(t_k - t_{k-1})\big(\gamma(\tau_k) - \gamma(t_{k-1})\big) + (t - t_{k-1})(\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k))\right|}{t_k - t_{k-1}}$$

$$\leq |\gamma(\tau_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)|$$

$$\textit{por que } |t - t_{k-1}| \leq |t_k - t_{k-1}|$$

$$< \delta \quad \textit{por (i)},$$

por otra parte, como $\int_{\Gamma_\varepsilon} f = \int_a^b f\big(\Gamma_\varepsilon(t)\big)\,\Gamma'_\varepsilon(t)dt$, *al ser* Γ_ε *suave por tramos y como* $\Gamma'_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k - t_{k-1}}[-\gamma(t_{k-1}) + \gamma(t_k)]$, *se sigue que* $\int_{\Gamma_\varepsilon} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma_\varepsilon(t))\,dt$ *(iv). De (ii) y (iv) se tiene que*

$$\left|\int_\gamma f - \int_{\Gamma_\varepsilon} f\right| = \left|\int_\gamma f - \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_k)\big)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_k)\big)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma_\varepsilon(t))\,dt\right|$$

$$\leq \varepsilon + \left|\sum_{k=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_k)\big)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma_\varepsilon(t))\,dt\right|$$

$$= \varepsilon + \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(\tau_k)) - f(\Gamma_\varepsilon(t))dt\right|,$$

y como $|\gamma(\tau_k) - \Gamma_\varepsilon(t)| < \delta$ *por (iii), entonces* $|f(\gamma(\tau_k)) - f(\Gamma_\varepsilon(t))| < \varepsilon$, *y así, por la proposición 2.3.6(ii) se sigue que*

$$\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(\tau_k)) - f(\Gamma_\varepsilon(t))\, dt\right| \leq \varepsilon(t_k - t_{k-1}) \qquad (v)$$

y sustituyendo (v) en la desigualdad anterior se sigue que

$$\left|\int_\gamma \; f - \int_{\Gamma_\varepsilon} f\right| \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \; \leq \varepsilon(1 + l(\gamma)),$$

así el lema queda demostrado en el caso que $G = B(c; r)$ *es un disco.*

Para el caso general, donde G *es un abierto arbitrario, como* $\{\gamma\} \subseteq G$ *es compacto,* $dist(\{\gamma\}, \partial G) > 0$ *y por lo tanto existe un real* r *tal que* $0 < r < dist(\{\gamma\}, \partial G)$. *Como* $\gamma: [a, b] \to G$ *es uniformemente continua para este* r *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $|s - t| < \delta$ *implica que* $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r$, *escojamos ahora una partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < . . . < t_n = b\}$ *con* $\|P\| < \delta$. *Se sigue que* $|\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| < r$ *para* $t \epsilon [t_{k-1} - t_k]$. *Por lo tanto, si* $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1} - t_k]}$, *entonces*

$$\{\gamma_k\} \subseteq B(\gamma(t_{k-1}); r) \quad \textit{para} \quad k = 1, . . . , n$$

Aplicando ahora el caso particular probado anteriormente, existe un camino poligonal $\Gamma_{k,\varepsilon}: |t_{k-1} - t_k| \to B(\gamma(t_{k-1}); r)$ *tal que,*

$$\Gamma_{k,\varepsilon}(t_{k-1}) = \gamma(t_{k-1}), \qquad \Gamma_{k,\varepsilon}(t_k) = \gamma(t_k) \qquad y \qquad \left|\int_{\gamma_k} f - \int_{\Gamma_{k,\varepsilon}} f\right| < \varepsilon/n,$$

definamos ahora $\Gamma_\varepsilon: [a, b] \to G$ *como* $\Gamma_\varepsilon(t) = \Gamma_{k,\varepsilon}(t)$ *si* $t \epsilon [t_{k-1} - t_k]$. *Se sigue que* $\left|\int_\gamma \; f - \int_{\Gamma_\varepsilon} f\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\gamma_k} f - \int_{\Gamma_{\varepsilon,k}} f\right)\right| < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon/n = \varepsilon$

La principal consecuencia de este lema es el análogo al teorema fundamental del cálculo para integrales de línea, en donde la integral depende sólo de los extremos inicial y final del camino γ , es decir es independiente de la trayectoria que une estos puntos.

2.3.8 Teorema. *Sea $G \subseteq C$ un abierto, $\gamma: [a, b] \to G$ un camino rectificable que inicia en $\alpha = \gamma(a)$ y termina en $\beta = \gamma(b)$. Si $f: G \to C$ es una función continua con una primitiva $F: G \to C$, entonces*

$$\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha),$$

en particular, si γ es una curva cerrada, entonces

$$\int_\gamma f = 0$$

Demostración. Supongamos primero que $\gamma: [a, b] \to G$ es suave por tramos. Entonces, por el teorema 2.3.4

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)$$

$$= F \circ \gamma(t)\Big|_a^b = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Ahora tomemos arbitrariamente a $\gamma: [a, b] \to G$ rectificable para el caso general. Por el lema 2.3.7, para todo $\varepsilon > 0$ existe un camino poligonal (y por *lo tanto suave por tramos)* $\Gamma_\varepsilon : [a\ , b] \to G$ *tal que* $\left|\int_\gamma\ f - \int_{\Gamma_\varepsilon} f\right| < \varepsilon$*, y por el caso particular visto anteriormente* $\int_{\Gamma_\varepsilon}\ f = F(\beta) - F(\alpha)$*. Se sigue que*

$$\left|\int_\gamma\ f - (F(\beta) - F(\alpha))\right| < \varepsilon,$$

y como ε *es arbitrario el teorema queda demostrado. Además si* γ *es cerrada, es decir* $\alpha = \beta$ *entonces* $F(\beta) = F(\alpha)$ *por consiguiente* $\int_\gamma\ f = 0$.

Teorema Fundamental del Cálculo.

2.3.9 Teorema*. Sea* f *una función continua en* G.

(i) *Si existe alguna función* F *definida en* G *que cumple para toda componente conexa* R *de* G

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_\gamma\ f(z)dz,$$

para algún punto $z_0 \in R$*, para todo* $z_1 \in R$ *y para toda curva* $\gamma \subset G$ *que una* z_0 *con* z_1*, entonces* F *es una primitiva de* f *en* G *(es decir* $F \epsilon H(G)$ *y* $F' = f$ *).*

(ii) *Si* $\int_\gamma\ f = 0$ *para toda curva cerrada en* G *entonces existe primitiva de* f *en* G.

Demostración. Probaremos que $F'(z_1)$ *existe y es igual a* $f(z_1)$*. Elijamos un disco* $B(z; r)$*, con r>0, contenido en* G*. Además elijamos una curva* γ *cualquiera que una* z_0 *con* z_1.

Tomemos el segmento $S: z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]$ *que une* z_1 *con* z_2. *La curva* $S + \gamma$ *une* z_0 *con* z_2, *entonces:*

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma+S} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz$$

$$= \int_{S} f(z)dz = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))](z_2 - z_1)dz,$$

dividiendo entre $z_2 - z_1$ *se deduce:* $\frac{F(z_2)-F(z_1)}{z_2-z_1} = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))]dz,$ *tomando límite cuando* $z_2 \to z_1$ *el integrando en la igualdad anterior tiende a* $f(z_1)$ *uniformemente con* $t \in [0,1]$ *(porque* f *es continua en el segmento compacto* S, *por lo tanto es uniformemente continua en* S*). Entonces, existe el límite y es*

$$\lim_{z_2 \to z_1} \frac{F(z_2)-F(z_1)}{z_2-z_1} = \lim_{z_2 \to z_1} \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))]dz = f(z),$$

Por definición de derivada ese límite es $F'(z_1) = f(z_1)$ *como queríamos demostrar.*

Para la parte (ii)*: Construiremos una función* F *en cada componente conexa de* G. *Llamaremos* R *a una componente conexa cualquiera de* G. *Elijamos* $z_0 \in R$ *y dejémoslo fijo. Tomemos* $z_1 \in R$ *cualquiera. Definamos la función*

$$F(z_1) = \int_{\gamma} f(z)dz,$$

donde γ es cualquiera curva suave a tramos contenida en G une z_0 con z_1. La función F está bien definida, es decir no depende de la curva γ elegida. En efecto, si tomamos dos curvas γ_1 y γ_2 contenida en G que unan el punto z_0 con z_1, la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ cumple por hipótesis que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z) = 0.$$

Luego la integral de f a lo largo de γ_1 y de γ_2, vale lo mismo. La función F así definida en cada componente conexa de G cumple la condición de la parte (i). Entonces F es una primitiva de f.

La siguiente afirmación muestra la fórmula Integral de Cauchy para un disco. Si $f(z)$ es una función analítica en un recinto que incluye un disco cerrado $\bar{B}$ con interior B y sea γ el circulo de borde de B. En esta condición se verifica la siguiente fórmula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw\ , \quad para\ z\epsilon B.$$

Esta se llama Formula Integral de Cauchy y la integral que figura en el segundo miembro, Integral de Cauchy, donde f(z) es una función analítica en un recinto al cual pertenece la curva γ conjuntamente con su interior.

Una consecuencia inmediata de esta afirmación seria:

2.3.10 Proposición. *Sea γ una curva rectificable, la función*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw,$$

en un recinto G es infinitamente derivable, y su derivada de cualquier orden n puede obtenerse derivando n veces la función sub-integral respecto de z,

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \qquad \text{(i)}$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción. En virtud de la definición de la función $F(z) = F^{(0)}(z)$, la fórmula (i) es válida pana $n = 0$ (recuérdese que $0! = 1$). Supongamos que la fórmula (i) ya está demostrada para un entero n no negativo, y demostrémosla para $n + 1$. La demostración se hará calculando directamente la derivada de $F^{(n)}(z)$, es decir, hallando el límite:

$$\lim_{z' \to z} \frac{F^{(n)}(z') - F^{(n)}(z)}{z'-z}.$$

Tomemos un círculo cerrado $k\colon |z' - z| \leq \rho$, perteneciente al recinto G, sea $\delta > 0$ la distancia entre su circunferencia y la curva γ. Supongamos que $K\colon |z| < R$ es un círculo con el centro en el origen de coordenadas que contiene en su interior tanto al círculo k como a la curva γ. Para un punto $z' \epsilon k$, se tiene:

$$F^{(n)}(z)' - F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} f(w)\frac{(w-z)^{n+1} - (w-z')^{n+1}}{(w-z)^{n+1}(w-z')^{n+1}}dw,$$

o bien, haciendo $w - z = t$, $z' - z = h$ *y, por consiguiente,* $w - z' = t - h$*:*

$$\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\frac{(t-h)^n + t(t-h)^{n-1} + \cdots + t^n}{t^{n+1}(t-h)^{n+1}}dw \qquad (ii).$$

Queremos demostrar que la expresión (ii), cuando $h \to 0$ *tiende a un límite igual a:*

$$\Psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\lambda f(w)\frac{1}{t^{n+2}}dw \qquad (iii),$$

consideremos la diferencia

$$\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \Psi(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\frac{t(t-h)^n + t^2(t-h)^{n-1} + \cdots + t^{n+1} - (n+1)(t-h)^{n+1}}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}}dw$$

$$= \frac{n!h}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\frac{(t-h)^n + [t+(t-h)](t-h)^{n-1} + \cdots + [t^n + t^{n-1}(t-h) + \cdots + (t-h)^n]}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}}dw \ (iv).$$

En nuestras condiciones

$2R > |t| = |w - z| > \delta$, $2R > |t - h| = |w - z'| \geq \delta$. *Supongamos que* $\mu = max_\gamma|f(w)|$ *y que* $l(\gamma)$ *es la longitud de* γ*; de (iv) obtenemos*

$$\left|\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h}\right| - \Psi(z) \leq \frac{n!|h|}{2\pi}\mu\frac{(2R)^n + 2(2R)^n + 3(2R)^n + \cdots + (n+1)(2R)^n}{\delta^{2n+3}}l(\gamma),$$

pero, evidentemente , el segundo miembro tiende a cero cuando $h \to 0$*. Por consiguiente,*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = f^{(n+1)}(z) = \Psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw,$$

con lo cual se termina la demostración.

Del teorema demostrado se deduce la siguiente consecuencia importante.

***2.3.11 Proposición**. Toda función $f: G \rightarrow C$ de variable compleja, analítica en un recinto G, es infinitamente derivable en ese recinto.*

Demostración. En efecto, sea $f(z)$ una función analítica en el recinto G; supongamos que z_0 es algún punto de este recinto y que γ es una circunferencia con el centro en el punto z_0, perteneciente al recinto G conjuntamente con todos sus puntos situados en el interior de γ, aplicando a $f(z)$ y a γ la formula Integral de Cauchy, obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad (i).$$

Así, pues, $f(z)$ se representa en el interior de γ por la integral de Cauchy, de aquí, por lo demostrado anteriormente, se deduce que $f(z)$ es indefinidamente derivable en el interior de γ y que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, . . .)$$

***2.3.12 corolario**. Si f es una función analítica en un abierto que incluye un disco cerrado $\bar{B}(\alpha; R)$, y si $|f(z)| \leq M$ para $|z-\alpha| = R$, entonce la siguiente desigualdad es válida para $n \epsilon N$:*

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

Demostración. Es cuestión de aplicar la proposición 2.4.10 en el circulo $\gamma = \{z: |z-\alpha| = R\}$:

$$\left|f^{(n)}(\alpha)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\alpha+Re^{i\theta})}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|f(\alpha+Re^{i\theta})\right|}{R^{n+1}}Rd\theta \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{M}{R^n}d\theta = \frac{n!}{2\pi}\ \frac{2\pi M}{R^n} = \frac{n!M}{R^n}$$

2.3.13 Proposición. *Si* f *es una función analítica en un abierto que incluye un disco cerrado* $\bar{B} = (\alpha; R)$, *entonces* f *es analítica en el disco* $B = (\alpha; R)$ *y*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n \quad para \ \ |z-\alpha| < R \qquad (i)$$

Demostración. Si $|z-\alpha| < R$, *por el corolario 2.3.12 implica que la serie de potencia (i) converge, por comparación con la serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-\alpha|^n}{R^n}$ *, así, esta serie de potencia tiene radio de convergencia* $\geq R$.

Si γ *es el círculo* $|z-\alpha| = R$, *la fórmula Integral de Cauchy muestra que,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \ \ para \ \ |z-\alpha| < R.$$

Ahora bien, para $0 < |z-\alpha| < R$, *la identidad,*

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{1}{w-\alpha}\Bigg/\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right) \ ,$$

permite desarrollar el último integrando en una serie geométrica.

Para cada $z \epsilon B(\alpha; R)$ *fijo, se obtiene:* $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(w-\alpha)^{n+1}}$, *la desigualdad* $|z - \alpha| < R = |w - \alpha|$ *muestra que esta serie converge absoluta y uniformemente para* $w \epsilon \gamma$.

Entonces se puede intercambiar la suma con la integral en la expansión

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-\alpha)^n}{(w-\alpha)^{n+1}} dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \right) (z - \alpha)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} dw \right) (z - \alpha)^n$$

Al aplicar la fórmula Integral de Cauchy para cada n.

Terminaremos este capítulo con un caso especial de un resultado más general que desarrollaremos en el siguiente capítulo, el Teorema de Cauchy para un Disco.

2.3.14 Proposición. *Si* f *es una función analítica en el disco* $B(a; R)$

$$f : B(a; R) \to C$$

y supongamos que γ *es una curva cerrada rectificable en* $B(a; R)$, *entonces* f *tiene una primitiva* F *en* $B(a; R)$ *y*

$$\int_{\gamma} f = 0 .$$

Demostración. Por la Proposición 2.3.13

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$ *para* $|z-\alpha| < R$. *Hagamos* $a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$, *luego la serie toma la forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^n \qquad \text{(i)},$$

para $z \epsilon B(a;R)$ *definamos entonces*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1}\right)(z-a)^{n+1} = (z-a)\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1}\right)(z-a)^n \quad \text{(ii)},$$

y observe que, como $\text{lím}\{(n+1)^{1/n}\} = 1$, *se deduce que esta serie de potencia tiene el mismo radio de convergencia que* $\sum a_n(z-a)^n$. *Por lo tanto,* F *se define en* $B(a;R)$. *Por otra parte, si*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1}\right)(z-a)^{n+1},$$

tenemos que $F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{a_n}{n+1}\right)(z-a)^{n+1-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^n$,

así tenemos que $F'(z) = f(z)$ *para* $|z-\alpha| < R$. *Como* $f(z)$ *está definida en* $B(a;R)$ *con primitiva* $F(z)$ *entonces,*

$$\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha),$$

al ser γ *una curva cerrada* $F(\beta) = F(\alpha)$ *por lo tanto* $\int_\gamma f = 0$.

Capítulo 3

Forma Homotópica del Teorema de Cauchy

En este capítulo se utiliza el concepto de Homotopía para presentar una distinta y moderna demostración del Teorema de Cauchy, mostrando las condiciones necesarias sobre una curva cerrada γ tal que $\int_{\gamma} f = 0$ para toda función analítica.

Esta condición es más geométrica que las utilizadas en otras versiones del teorema y además observaremos una consecuencia inmediata, la independencia de camino para la integración de una función de variables compleja, como también las condiciones sobre las cuales el recíproco de la Forma Homotópica del Teorema de Cauchy es válido.

3.1 Curvas Homotópicas

Se define el concepto de Homotopía para considerar un caso especial llamado Curvas Homotópicas, que es una relación de equivalencia. Estas curvas serán consideradas en un abierto $G \subset C$.

3.1.1 Definición (Homotopía). *Si* γ *y* g *son aplicaciones continuas del espacio* X *en el espacio* Y, *decimos que* γ *es homotópica a* g *si existe una aplicación continua:*

$$H: X\ x\ [0,1] \to Y,$$

tal que $H(x,0) = \gamma(x)$ *y* $H(x,1) = g(x)$ *para cada* $x \epsilon X$. *La aplicación* H *se conoce como homotopía entre* γ *y* g. *Si* γ *es homotópica a* g *escribiremos* $\gamma \simeq g$.

Consideremos ahora un caso especial de homotopía, en el cual las aplicaciones continuas son curvas sobre un abierto $G \subset C$.

Para la definición rigurosa de Curvas Homotópicas, supondremos que las curvas $\gamma: [a,b] \to G$ *son aplicación continua tal que:*

$$\begin{cases} \gamma(a) = z_0 \\ \gamma(b) = z_1 \end{cases},$$

diremos que γ *es una curva en* G *desde* z_0 *hasta* z_1. *También diremos que* z_0 *es el punto inicial y* z_1 *es el punto final de la curva* γ.

***3.1.2 Definición (Curvas Homotópicas)**. Si γ_0 y γ_1 son dos curvas orientadas que aplican $\gamma_0, \gamma_1: [a,b] \to G$, con extremos iniciales iguales $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = z_0$ y extremos finales iguales $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = z_1$ entonces γ_0 es homotópica por curvas a γ_1 en G si existe una Homotopía (función continua ó deformación continua que no se sale de G):*

$$h: [a,b]\ x\ [0,1] \to G \text{ tal que}$$

a. $h(s,0) = \gamma_0(s)$ *y* $h(s,1) = \gamma_1(s)$ *para todo* $s\epsilon\ [a,b]$

b. $h(a,t) = z_0$ *y* $h(b,t) = z_1$ *para todo* $t\epsilon\ [0,1]$

Si γ_0 es homotópica por curvas a γ_1 en G, escribiremos $\gamma_0 \sim \gamma_1$ y diremos que γ_0 y γ_1 son curvas homotópicas o simplemente que γ_0 es homotópica a γ_1, mediante una homotopía que mantiene fijos los extremos de las curvas por las condición b de la definición 3.1.2.

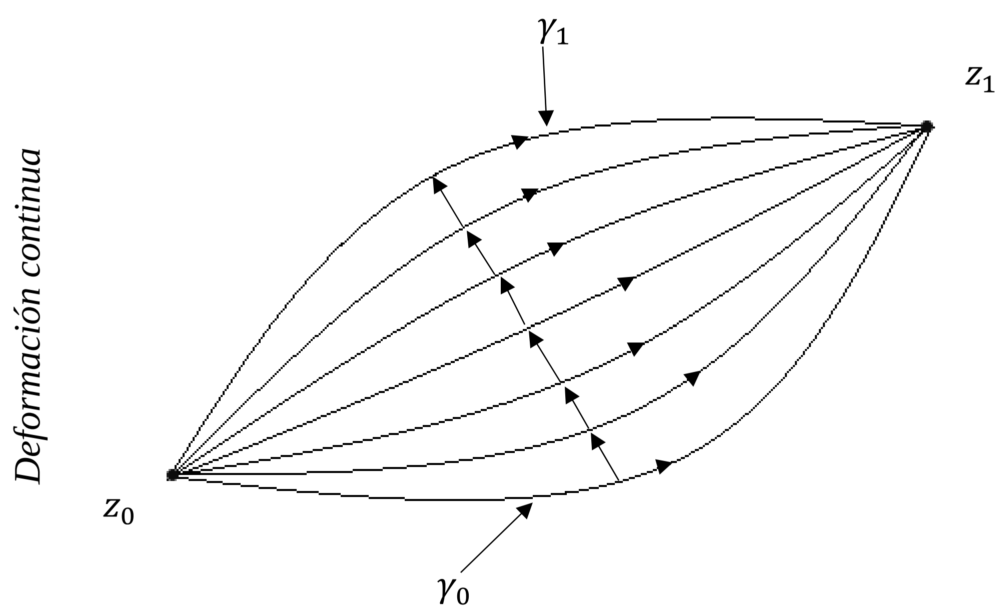
Para indicar que la deformación continua entre las curvas no se sale del conjunto G se debe usar una notación como $\gamma_0 \sim \gamma_1(G)$ debido a la importancia de señalar donde γ_0 es homotópica por curvas a γ_1. Sin embargo a menos que exista la posibilidad de confusión, solo escribiremos $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Conocer el significado intuitivo es importante para aprovechar al máximo la definición rigurosa de curvas homotópicas.

Para esto tomemos un abierto $G \subset C$ y dos curvas γ_0 y γ_1 contenidas en G, curvas orientadas que contengan los mismos extremos, un extremo inicial z_0 y un extremo final z_1 .

Por definición se dice que γ_0 y γ_1 son homotópicas en G si existe "una deformación continua (3.1.2 Definición) que lleva γ_0 a γ_1 dejando fijos sus extremos y sin salirse de G".

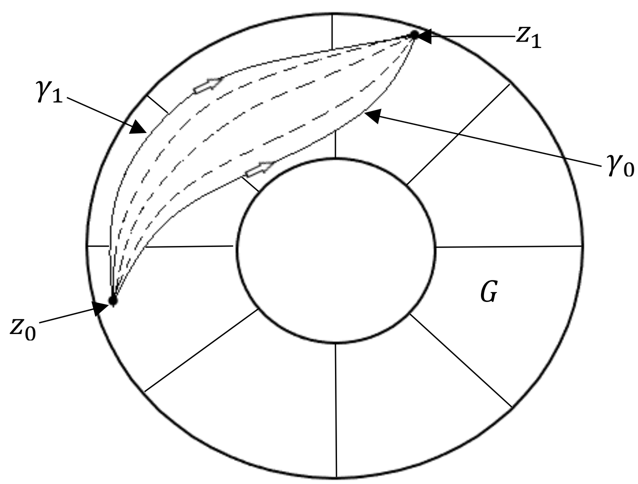
Observe la gráfica.



La deformación continua significa que hay un pasaje de curvas intermedias entre γ_0 $hasta$ γ_1*. Es como si* γ_0 *se va deformando hasta transformase a* γ_1 *a través de curvas intermedias contenidas en* G.

3.1.3 Ejemplo.

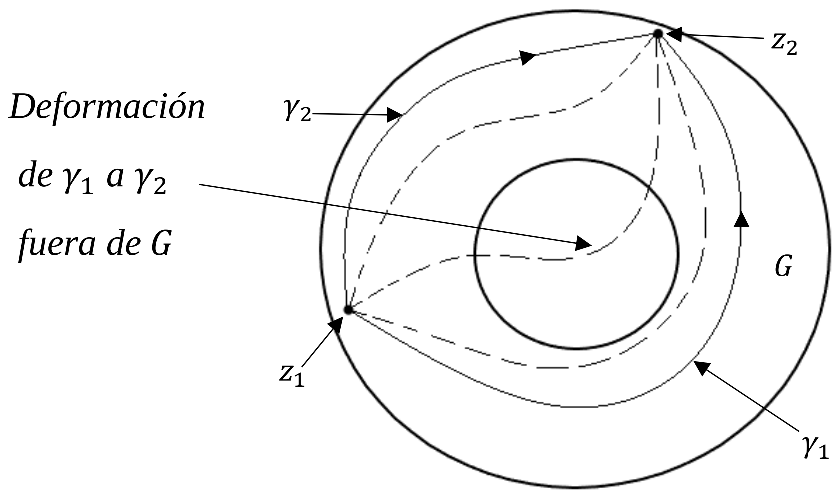
Consideremos al conjunto G *como una corona en el plano o sea la intersección del exterior de una circunferencia con el interior de otra circunferencia de radio mayor.*



Estás dos curvas γ_0 *y* γ_1 *son homotópicas en* G *porque existe una deformación continua que lleva* γ_0 *a* γ_1 *dejando fijos los extremos, sin salirse de* G.

3.1.4 Ejemplo.

Tomemos el mismo conjunto G del ejemplo anterior con dos curvas γ_1 y γ_2, para ambas con el mismo puntos inicial z_1 y el mismo puntos final z_2. No existe una deformación continua, dejando fijo los puntos z_1 y z_2 que lleve γ_1 a γ_2 sin salirse de G. Aquí γ_1 y γ_2 son no homotópicas en G



3.1.5 Deformación Continua.

Expresemos ahora que es una deformación continua, que lleva γ_0 a γ_1 sin salirse de G. Tomemos dos curvas parametrizadas:

$$\gamma_0 \text{ es una curva } \begin{cases} x = x_0(s) \\ y = y_0(s) \end{cases} \quad o \quad \gamma_0\colon\ p = p_0(s) \text{ con } a \le s \le b \qquad 3.1a$$

$$\gamma_1 \text{ es otra curva } \begin{cases} x = X_1(u) \\ y = Y_1(u) \end{cases} \quad o \quad \gamma_1\colon\ p = P_1(u) \text{ con } c \le u \le d \qquad 3.1b$$

Vamos afirmar que se puede parametrizar ambas curvas γ_0 *y* γ_1*, con el mismo parámetro* s *perteneciente a un intervalo cerrado y acotado* $[a, b]$*, manteniendo las orientaciones de las curvas.*

Para poder demostrar la afirmación hagamos:

$$s = \frac{(u-c)(b-a)}{(d-c)} + a \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \frac{(s-a)(d-c)}{(b-a)} + c \qquad 3.1c$$

y llamemos $u(s) = \frac{(s-a)(d-c)}{(b-a)} + c$ *3.1ch*

Para un valor de s obtenemos un punto $\gamma_0(s)$ *en la curva* γ_0 *y para ese mismo valor de s le asociamos un valor u a la curva* γ_1*, por medio de 3.1ch y obtenemos el punto* $\gamma_1(u)$ *en la curva* γ_1 *y a este punto* $\gamma_1(u)$ *lo vamos a identificar, no por el parámetro* u *sino por el parámetro s correspondiente.*

De manera que, a medida que se recorre la curva γ_0 *en los instante s, se recorre los puntos de la curva* γ_1 *en los mismos instantes. Por eso es necesario establecer una correspondencia que para cada valor de s le haga* *corresponder un valor de u, y a través de ella hacerle corresponder el punto $\gamma_1(u)$ al parámetro s que dio lugar al punto $\gamma_0(s)$.*

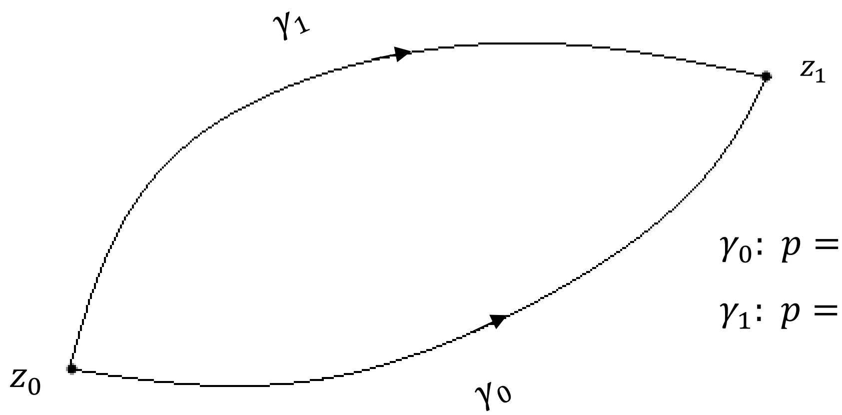
Esta correspondencia establecida es una correspondencia biunívoca entre el intervalo $[a, b]$ que varía la s y el intervalo $[c, d]$, que varía la u creciente, es una transformación lineal entre esos dos intervalo.

Observe en 3.1c que cuando $\begin{cases} u = c & \Leftrightarrow \quad s = a \\ u = d & \Leftrightarrow \quad s = b \end{cases}$,

entonces la curva γ_1 (3.1b) haciendo el cambio de parámetro (3.1ch) queda re- parametrizada por $\begin{cases} x = X_1(u(s)) \\ y = Y_1(u(s)) \end{cases}$ *o* $\gamma_1:\ p = p_1(u(s))$ *con* $a \leq s \leq b$ *3.1d*

A esta función compuesta de s, $X_1\big(u(s)\big)$ la llamaremos $x_1(s)$ y $Y_1(u(s))$ la llamaremos $y_1(s)$. La curva γ_1 (3.1b) queda finalmente parametrizada por $\begin{cases} x = x_1(s) \\ y = y_1(s) \end{cases}$ *o* $\gamma_1:\ p = p_1(s)$ *en el intervalo $a \leq s \leq b$ que es otra parametrización para la misma curva orientada γ_1 (3.1b). Así, ambas curvas γ_0 y γ_1, queda parametrizadas con el parámetro s variando en $a \leq s \leq b$.*

Tomemos ahora dos curvas γ_0 y γ_1 con el mismo extremos iniciales z_0 y el mismo extremo final z_1, observe la siguiente figura.



γ_0: $p = p_0(s)$ *con* $a \leq s \leq b$

γ_1: $p = p_1(s)$ *con* $a \leq s \leq b$

Por lo visto anteriormente, ambas curvas se pueden parametrizar utilizando un parámetro en común variándolo en el mismo intervalo. A la parametrización de la primera curva seria γ_0: $p = p_0(s)$ *con* $a \leq s \leq b$ *y la parametrización de la segunda curva* γ_1: $p = p_1(s)$ $a \leq s \leq b$.

Que tengan los mismo extremos iniciales y finales quiere decir que:

$$p_0(a) = p_1(a) = z_0$$

$$p_0(b) = p_1(b) = z_1$$

Por definición una deformación continua que lleva γ_0 *en* γ_1 *es una función*

$p = h(s,t) : \begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases}$ *definida y continua para* $\forall (s,t) \in [a,b]x[0,1]$.

Esto quiere decir que para cualquier valor s *de* $[a,b]$ *y* t *de* $[0,1]$ *está definido el punto p igual a* $h(s,t)$ *y es una función continua. Para que la función* $h(s,t)$ *lleve* γ_0 *en* γ_1 *además tiene que cumplir que cuando* $t=0$ *con* $a \leq s \leq b$ *, es decir* $h(s,0)$*, se obtiene una parametrización de la curva* γ_0 *y cuando* $t=1$ *con* $a \leq s \leq b$ *, es decir* $h(s,1)$*, se obtiene una parametrización de la curva* γ_1*.*

3.1.6 Ejemplo.

Consideremos un arco de circunferencia con centro en el origen y radio 1 que va desde el punto $(1,0)$ *al punto* $(-1,0)$ *como curva* γ_0 *y como curva* γ_1 *consideremos el segmento de recta que une al punto* $(1,0)$ *al punto* $(-1,0)$ *. Se puede parametrizar las curvas* γ_0 *y* γ_1 *así;*

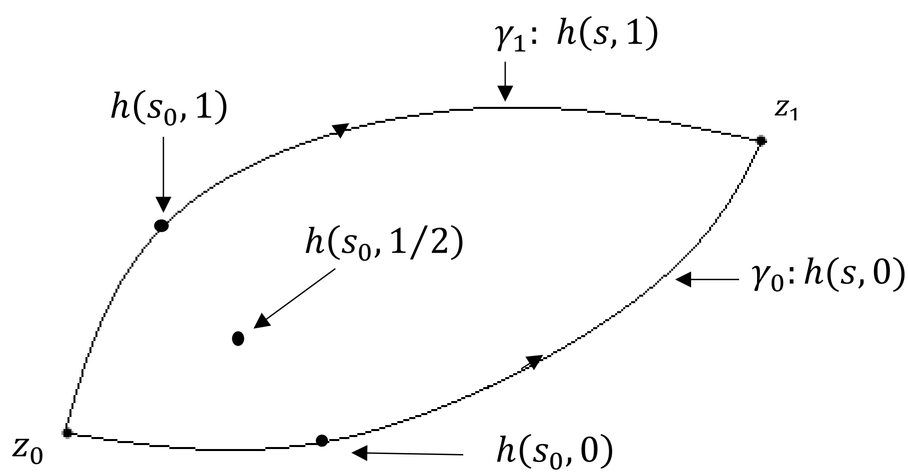
$$\gamma_0 = \begin{cases} x = \cos s \\ y = sen\ s \end{cases} \text{ con } 0 \leq s \leq \pi \qquad y \qquad \gamma_1 = \begin{cases} x = 1 - \frac{2s}{\pi} \\ y = 0 \end{cases} \text{ con } 0 \leq s \leq \pi,$$

tomemos la deformación continua (Homotopía):

$$h = (s,t) = \begin{cases} x = (1-t)\cos s + t\left(1 - \frac{2s}{\pi}\right) \\ y = (1-t)\ sen\ s \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq s \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

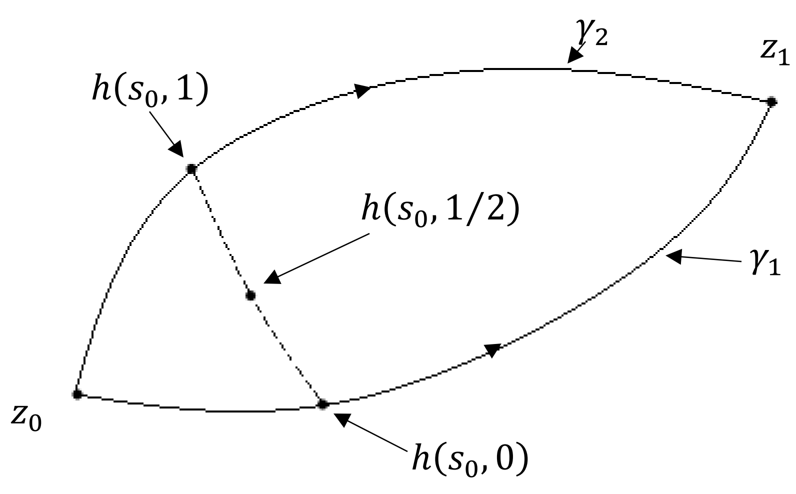
Observe que cuando $t=0$*, se obtiene la parametrización* $\begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\ t \end{cases}$ *y* *cuando* $t = 1$, *se obtiene* $\begin{cases} x = 1 - \frac{2s}{\pi} \\ y = 0 \end{cases}$, *así* $h = (t, s)$ *con* $a \leq s \leq b$ *y* $0 \leq t \leq 1$ *es una deformación continua que lleva* γ_0 *a* γ_1.

Sea $h(s, t)$ *con* $s \in [a, b]$ *y* $t \in [0, 1]$ *una deformación continua que lleva* γ_0 *en* γ_1. *La deformación continua significa que si tenemos dos curvas* γ_0 *y* γ_1 *orientadas con los mismos extremos iniciales y finales* z_0, z_1 *respectivamente, al fijar un valor del parámetro s, por ejemplo* s_0, *tomando a* $t = 0$ *se obtiene en la curva* γ_0 *el punto* $h(s_0, 0)$. *El correspondiente punto en la curva* γ_1 *para* s_0 *se obtiene utilizando* $t = 1$ *es decir* $h(s_0, 1)$. *Observemos la siguiente figura.*

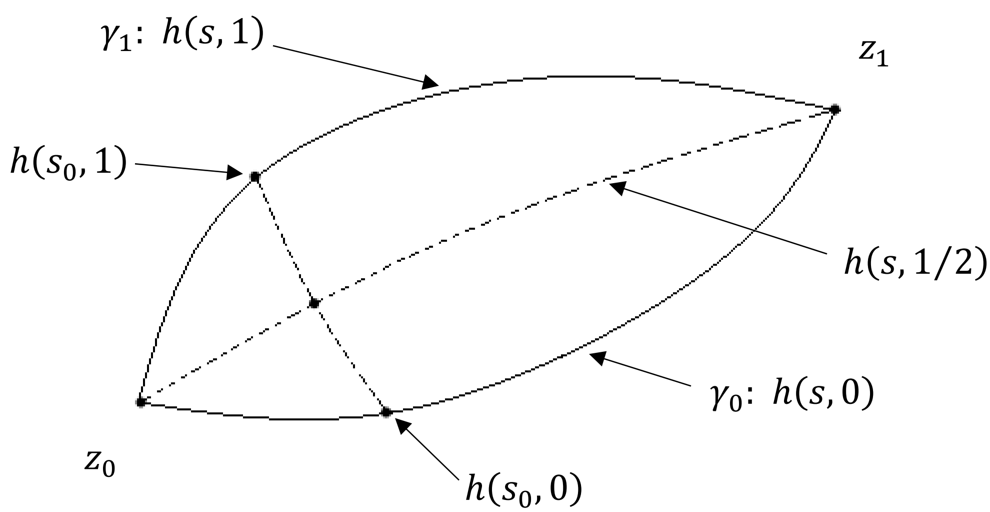


Cuando a la función $h(s,t)$ se le asigna el valor de $t = 0$ y se hace varia s en $[a,b]$ se obtiene la curva γ_0. Cuando a la función $h(s,t)$ se fija el valor de $t = 1$ y se hace varia s en $[a,b]$ se obtiene la curva γ_1. Cuando se fija el valor de s en un valor s_0 y se toma para t un valor en $[0,1]$ por ejemplo $t = 1/2$, se obtiene un punto $h(s_0, 1/2)$ entre las curvas γ_0 y γ_1. Observe la figura anterior.

Al hacer variar t en $[0,1]$ dejando la s constante en s_0, obtenemos todo un conjunto continuo de puntos que une al punto $h(s_0, 0)$ con el punto $h(s_0, 1)$, es una deformación que lleva un punto de la primera curva γ_0 a otro punto de la segunda curva γ_1 variando t. Observe la figura siguiente.



Cuando la t se fija por ejemplo en $t = 1/2$ y se varia a s en $[a, b]$, se obtiene una curva intermedia $h(s, 1/2)$ entre γ_0 y γ_1. Observe la figura siguiente.



Al variar la variable t en $[0,1]$ se obtiene curvas intermedias que unen a los puntos z_0 y z_1. Esto quiere decir que la función $h(s, t)$ deja fijo los extremos z_0 y z_1 lo que significa que:

$$h(a, t) = z_0 \ \forall t \in [0,1] \ \ y \ \ h(b, t) = z_1 \ \forall t \in [0,1].$$

Afirmar que la función $h(s, t)$ no se sale del conjunto G quiere decir que para $\forall\ s \in [a, b]$ y $\forall\ t \in [0, 1]$, el punto $p = h(s, t) \in G$.

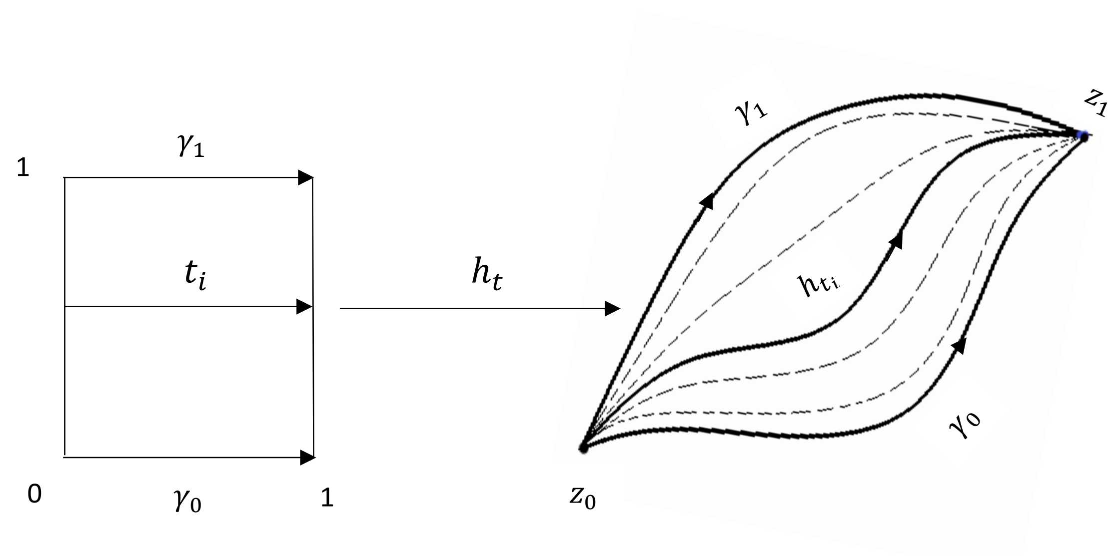
Así por definición decimos que tenemos una Homotopía en G entre las curvas γ_0 *y* γ_1 *si tenemos una deformación continua que lleva* γ_0 *en* γ_1 *dejando fijo los extremos* z_0 *y* z_1 *de ambas curvas y no se sale de G. Finalmente decimos por definición que* γ_0 *y* γ_1 *son Curvas Homotópicas en G entre* z_0 *y* z_1.

3.2 Curvas Homotópicas. Relación de Equivalencia

De ahora en adelante asumamos que $\gamma: [0,1] \rightarrow G$ *es una curva. Además pensando en la función* h *como una familia continua de curvas en* G *escribiremos:*

$$h_t[0,1] \rightarrow G \text{ dada por } h_t(s) = h(s,t) \text{ para } t\epsilon\ [0,1]$$

La condición b de la definición 3.1.2, aplicada a h_t *dice que cada una de las curvas* h_t *tiene el mismo extremo inicial* z_0 *y el mismo extremo final* z_1 *(son curvas desde* z_0 *hasta* z_1*), más aún, la condición a de la definición 3.1.2 establece simplemente que* h_t *, como homotopía, entre* γ_0 *y* γ_1 *hace que* $h_0 = \gamma_0$ *y* $h_1 = \gamma_1$*. Observe la figura siguiente:*



En la figura se observa que la homotopía h_t manda a:

- ✓ *El lado vertical izquierdo del cuadrado* $[0,1]\ x\ [0,1]$ *en el punto inicial* z_0.
- ✓ *El lado vertical derecho del cuadrado* $[0,1]\ x\ [0,1]$ *en el punto inicial* z_1.
- ✓ *El lado horizontal inferior del cuadrado* $[0,1]\ x\ [0,1]$ *en la curva* $h_0 = \gamma_0$.
- ✓ *El lado horizontal superior del cuadrado* $[0,1]\ x\ [0,1]$ *en la curva* $h_1 = \gamma_1$.
- ✓ *El segmento horizontal de altura* t_i *del cuadrado* $[0,1]\ x\ [0,1]$ *en la curva* h_{t_i}.

3.2.1 Proposición. *La relación de homotopía entre curvas es una relación de equivalencia. Es decir, si* γ_0, $\gamma_1 : [0,1] \to G$ *son dos curvas en* G *con los mismos puntos iniciales y finales, la relación* $\gamma_0 \sim \gamma_1$ *es una relación de equivalencias.*

Demostración. Veamos que se cumple las propiedades de relación de equivalencia.

Es claro que la aplicación dada por $h(s,t) = \gamma(s)$ *es una homotopía de curvas entre* γ *y* γ, *por lo tanto* $\gamma \sim \gamma$.

Supongamos que $\gamma_0 \backsim \gamma_1$ *y veamos que* $\gamma_1 \backsim \gamma_0$. *Sea* $h: [0,1]x[0,1] \to G$ *una homotopía entre* γ_0 *y* γ_1 *que satisface la definición 3.1.2. Definamos entonces* $K(s,t) = h(s, 1-t)$ *que es una homotopía entre* γ_1 *y* γ_0, *así* $\gamma_0 \sim \gamma_1$ *es una homotopía de curvas.*

Supongamos que $\gamma_0 \backsim \gamma_1$ *y* $\gamma_1 \backsim \gamma_2$. *Probaremos que* $\gamma_0 \backsim \gamma_2$. *Sea* $h: [0,1]x[0,1] \to G$ *una homotopía entre* γ_0 *y* γ_1 *y* $K: [0,1]x[0,1] \to G$ *una homotopía entre* γ_1 *y* γ_2 *. Definamos*

$$H: [0,1]\ x\ [0,1] \to G,$$

por la ecuación

$$H(s,t) = \begin{cases} h(s,2t) & si\ \ t\ \epsilon\ \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ K(s, 2t-1) & si\ \ t\ \epsilon\ \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

La aplicación H *está bien definida ya que para* $t = \frac{1}{2}$, *tenemos* $h(s,2t) = g(s) = K(s, 2t-1)$. *Dado que* H *es continua en los dos sub-conjuntos cerrados* $[0,1]\ x\ [0,1/2]$ *y* $[0,1]\ x\ [1/2\ ,1]$ *de* $[0,1]x\ [0,1]$, *se* *tiene que* H *es continua en todo* $[0,1]\ x\ [0,1]$, *por lo tanto* H *es una homotopía entre* γ_0 *y* γ_2, *así se prueba que* $\gamma_0 \backsim \gamma_2$.

Si h *y* K *son homotopías de curvas, entonces también lo es* H, *veamos: supongamos que* z_0 *y* z_1 *son los puntos inicial y final, respectivamente, de las curvas* γ_0, γ_1 *y* γ_2. *Entonces se tiene que:*

- ✓ $H(s,0) = h(s,0) = \gamma_0(s)$,
- ✓ $H(s,1) = K(s,1) = \gamma_2(x)$.

Ahora, si $t \epsilon \left[0,\frac{1}{2}\right]$:

- ✓ $H(0,t) = h(0,2t) = z_0$
- ✓ $H(1,t) = h(1,2t) = z_1$

Y si $t \epsilon \left[\frac{1}{2},1\right]$:

- ✓ $H(0,t) = K(0,2t-1) = z_0$,
- ✓ $H(1,t) = K(1,2t-1) = z_1$.

El siguiente ejemplo muestra que en un conjunto convexo (es decir, para dos puntos cualesquiera z_0, z_1 *en* A, *el segmento de recta que los une está* *contenido en A) para dos curvas cualquiera* γ_0, γ_1 *con extremos iniciales iguales y con extremos finales iguales, siempre son homotópicas.*

3.2.2 Ejemplo. *Si* G *es convexo y* $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \to G$ *son dos curvas tales que* $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ *y* $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$ *; entonces* γ_0 *es homotópica a* γ_1 *en* G. *En efecto, defina* $h: [0,1]x[0,1] \to G$ *mediante*

$$h(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$$

(fijando s, *observe que* $h(s,t)$ *es un punto en el segmento de recta que une* $\gamma_0(s)$ *con* $\gamma_1(s)$, *y este segmento está contenido en* G *porque éste es convexo) Claramente* h *es una homotopía* $h: \gamma_0 \sim \gamma_1$.

Es importante resaltar que una homotopía entre dos curvas es siempre con relación al conjunto G donde están las curvas; si se cambia este conjunto puede cambiar el que las curvas sean o no homotópicas.

3.2.3 Definición (Lazos). *La definición de homotopía no pone ninguna condición en las curvas, por ejemplo, éstas pueden ser curvas cerradas* $(z_0 = z_1)$. *Si las curvas* γ_0 *y* γ_1 *son curvas cerradas la definición de* *homotopía es la misma, entonces la condición b de la definición 3.1.2 sería* $h(0,t) = h(1,t)$ *para todo* $t \epsilon [0,1]$.

Al definir $\gamma_t: [0,1] \to G$ *por* $\gamma_t(s) = h(s,t)$ *tenemos que cada* γ_t *es una curva cerrada y forma una familia de curvas que comienza en* γ_0 *y termina en* γ_1. *Sin embargo tengan en cuenta que no es necesario que cada* γ_t *sea rectificable. En la práctica donde* γ_0 *y* γ_1 *son rectificable cada una de las* γ_t *también será rectificable.*

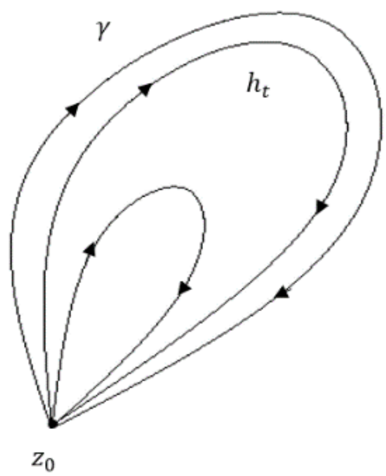
En el caso que γ_0 *y* γ_1 *sean curvas cerradas con,*

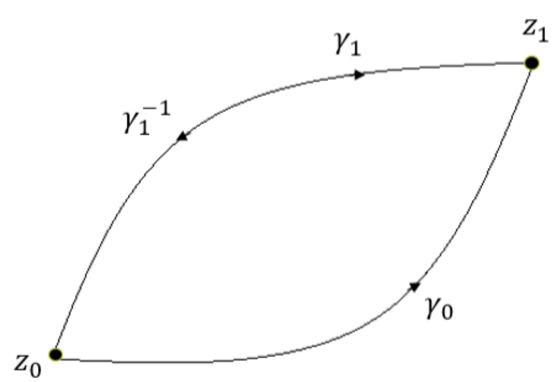
$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_0,$$

en ocasiones se dice que γ_0 *y* γ_1 *son lazos basados en el punto* z_0.

Un ejemplo de lazo, trivial pero importante, es el lazo constante $z_0: [0,1] \to G$ *dado por* $z_0(t) \coloneqq z_0$ *para todo* $t \epsilon [0,1]$. *El hecho en el cual una curva o lazo es homotópica a una curva o lazo constante es una situación que encontramos a menudo, por lo cual introduciremos la siguiente definición.*

***3.2.4 Definición**. Si un lazo $\gamma: [0, 1] \to G$ basado en $z_0 \epsilon G$ es homotópica al lazo constante z_0, se dice que γ es nulhomotópica, y se escribe $\gamma \sim z_0$, (homotópica a un lazo constante), además si dos curvas γ_0 y γ_1 contenidas en G, ambas con el mismo extremo inicial y con el mismo extremo final, se dicen homotópicas en G, si la curva $\gamma = \{\gamma_0 + \gamma_1^{-1}\}$ es homotópica a un lazo constante $z_0 \epsilon G$.* (E*l signo + indica que la curva* γ_0 *va ser seguida por la curva* γ_1^{-1})





Note que si γ_0 y γ_1 son curvas rectificable con punto inicial z_0 y punto final z_1 entonces $\gamma = \{\gamma_0 + \gamma_1^{-1}\}$ es una curva cerrada rectificable.

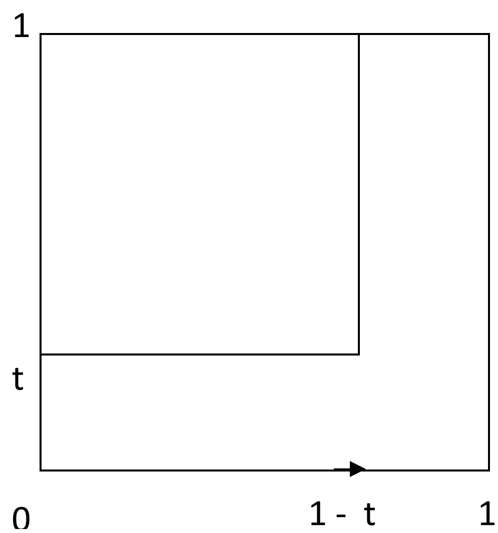
Supongamos además que h cumplen con la definición 3.1.2 y definamos $\gamma: [0, 1] \to G$ por:

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma(s) = \gamma_0(3s) \quad para \quad 0 \le s \le 1/3 \\ \gamma(s) = z_1 \quad para \quad 1/3 \le s \le 2/3 \\ \gamma(s) = \gamma_1(3-3s) \; para \; 2/3 \le s \le 1 \end{cases}$$

También definamos $H: [0,1]x[0,1] \to G$ *por:*

$$H(s,t) = \begin{cases} h(3s(1-t),t) & si & 0 \le s \le 1/3 \\ h(1-t, 3s-1+2t-3st) & si & 1/3 \le s \le 2/3 \\ \gamma_1((3-3s)(1-t)) & si & 2/3 \le s \le 1 \end{cases}$$

En efecto se puede observar en $H(s,t)$ *que un valor dado de* t *es la restricción de H al sub-cuadrado* $[0,1-t]x[t,1]$, *esto verifica que* $\gamma \sim z_0$



La idea intuitiva es que si γ *es un lazo o curva rectificable cerrada homotópica a un lazo constante* ($\gamma \sim z_0$) *se puede contraer, mediante una homotopía al punto* z_0, *y por lo tanto* γ *no rodea ningún hoyo en* G. *Si todos los* γ *basadas en* $z_0 \in G$, *se pueden contraer al punto* z_0, *entonces* G *no tiene* *ningún hoyo. En este sentido las* $(\gamma \sim z_0)$ *son importantes porque detectan los hoyos que pueden tener* G.

3.2.5 Definición*. Un conjunto abierto* $G \subset C$ *es simplemente conexo si cumple con las siguientes condiciones:*

- ✓ *G es conexo.*
- ✓ *Todo par de curvas contenidas en* G *con los mismo extremos iniciales y finales son homotópicas ó si todo lazo en* G *es Nulhomotópica.*

Note que la idea intuitiva es que una región simplemente conexa no tiene hoyos, porque todo lazo se puede contraer a un punto.

3.3 Forma Homotópica del Teorema de Cauchy

El describir el concepto de Homotopía nos permite mostrar uno de los resultados más trascendentales en el estudio de la integración de funciones analíticas conocido como el Teorema Integral de Cauchy, presentado de una forma totalmente distinta al acostumbrado planteamiento que hace la teoría de las funciones de variable compleja.

3.3.1 Teorema (Forma Homotópica del Teorema de Cauchy).

Si $f: G \to C$ *es una función analítica y* $\gamma: [0,1] \to G$ *es un lazo rectificable y nulhomotópica en* z_0 *contenido* G, *entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0 \qquad\qquad (i)$$

Demostración. Como γ *es nulhomotópica a* z_0 *en* G, *se tiene una homotopía* $h: \gamma \sim z_0$. *En particular,* $h(0,t) = h(1,t) = z_0$, *para* $0 \leq t \leq 1$.

Supongamos que $G \subsetneq C$. *Como* $[0,1]\ x\ [0,1]$ *es un compacto, entonces* h *es uniformemente continua y* $h([0,1]\ x\ [0,1]\,) \subseteq G$ *es compacto. Por lo tanto,*

$$r = d(h([0,1]\ x\ [0,1]\,)\,, C - G) > 0$$

y existe un $n \epsilon N$ *tal que si* $|(s,t)-(s',t')|<{}^{2}/_{n}$ *se tiene que* $|h(s,t)-h(s',t')|<r$.

Ahora dividamos el cuadrado $[0,1]\ x\ [0,1]$ *en sub-cuadrado de lado* $\frac{1}{n}$ *mediante la partición* $0=\frac{0}{n}<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n}{n}=1$ *del intervalo* $[0,1]$ *y para el sub-cuadrado* $\mathcal{C}_{jk}\coloneqq\left[\frac{j}{n},\ \frac{j+1}{n}\right]x\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right],\qquad 0\le j,k\le n-1$

considere las imágenes $z_{jk}\coloneqq h\left(\frac{j}{n},\ \frac{k}{n}\right)$ *de sus vértice, para* $0\le j,k\le n$.

Observe que, como diám$\mathcal{C}_{jk}=\frac{\sqrt{2}}{n}<\frac{2}{n}$ *entonces* $h(\mathcal{C}_{jk})\subseteq B\big(z_{jk};r\big)$. *Por lo tanto, si* P_{jk} *es el polígono cerrado* $\left[z_{jk}\ ,\ z_{j+1,k}\ ,\ z_{j+1\ ,k+1}\ ,\ z_{j,k+1}\ ,\ z_{jk}\right]$, *por la convexidad del disco se tiene que* $P_{jk}\subseteq\ B\big(z_{jk};r\big)$, *pero de la proposición 2.3.14 se sabe que*

$$\int_{P_{jk}} f=0\qquad\qquad (ii)$$

para cualquiera función analítica en G.

Ahora, para los polígonos $Q_k\coloneqq[z_{0k},\ z_{1k},\ .\ .\ .\ ,z_{nk}]$ *que son cerrados porque* $z_{0k}=h\left(0,\ \frac{k}{n}\right)=z_0=h\left(1,\ \frac{k}{n}\right)=z_{nk}$. *Mostraremos que*

$$\int_\gamma\ f=\int_{Q_0}f=\int_{Q_1}f=\cdots=\int_{Q_n}f=\int_{z_0}\ f=0\qquad\qquad (iii),$$

lo cual prueba (i) *como se desea.*

Para demostrar (iii) *lo haremos probando una igualdad a la vez. Para la primera igualdad en* (iii)

$$\int_{\gamma} f = \int_{Q_0} f$$

consideremos las restricciones $\gamma_j \coloneqq \gamma|_{\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]}$ *observe que*

$$\gamma\left(\frac{j}{n}\right) = h\left(\frac{j}{n}, 0\right) = z_{j0} \quad y \quad \gamma\left(\frac{j+1}{n}\right) = h\left(\frac{j+1}{n}, 0\right) = z_{j+1,0}\,,$$ *por lo que*

$\gamma_j + \left[z_{j+1,0},\ z_{j0}\right]$ *(el signo + indica que* γ_j *va ser seguido por el polígono) es una recorrido cerrado en* $B\left(z_{j0}; r\right) \subseteq G$ *y consecuentemente*

$$\int_{\gamma_j} f = -\int_{\left[z_{j+1,0},\ z_{j0}\right]} f = \int_{\left[z_{j0},\ z_{j+1,0}\right]} f,$$

sumando para $0 \leq j \leq n-1$ *se tiene que*

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma_j} f = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\left[z_{j0},\ z_{j+1,0}\right]} f = \int_{Q_0} f,$$

como se quería.

La penúltima igualdad en (iii)

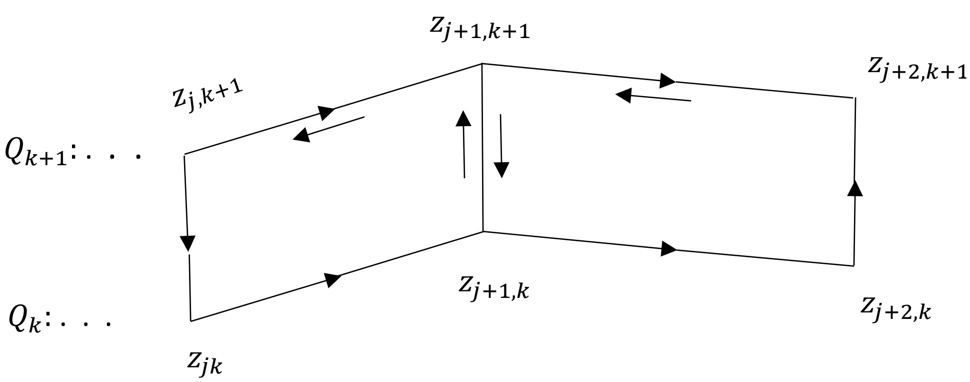
$$\int_{Q_n} f = \int_{z_0} f\ ,$$

es trivial ya que $Q_n := [z_{0n},\ z_{1n}\ ,\dots, z_{nn}\ ]$ *es el polígono dado por el punto* z_0 *porque cada* $z_{jn} = h\left(\frac{j}{n}, 1\right) = z_0$.

Finalmente, para probar las igualdades intermedias en (iii),

$$\int_{Q_k} f = \int_{Q_{k+1}} f \qquad (iv),$$

consideremos los polígonos Q_k *y* Q_{k+1} *correspondiente:*



donde hemos ilustrado una parte de éstos mostrando dos sub-polígonos P_{jk} *y* $P_{j+1,k}$ *consecutivos con sus orientaciones correspondiente. Como cada* $\int_{P_{jk}} f = 0$ *se sigue que*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{jk}} f = 0 \ , \qquad (v)$$

y como dos sub-polígonos P_{jk} *y* $P_{j+1,k}$ *consecutivos comparten un lado con* *orientaciones opuestas, la suma anterior es la integral de* f *sobre la curva*

$$Q_k + [z_{nk}, z_{n,k+1}] + Q_{k+1}^{-1} + [z_{0,k+1}, z_{0k}] \qquad\qquad (vi),$$

dada por el polígono Q_k *seguida del lado extremo derecho* $[z_{nk}, z_{n,k+1}]$*, seguida del polígono* Q_{k+1}^{-1} *(con orientación opuesta) y finalmente seguida del lado izquierdo* $[z_{0,k+1}, z_{0k}]$.

Ahora, como:

$$z_0 = z_{0k} = h\left(0, \frac{k}{n}\right) = h\left(1, \frac{k}{n}\right) = z_{nk} = z_0 \quad y$$

$$z_0 = z_{0,k+1} = h\left(0, \frac{k+1}{n}\right) = h\left(1, \frac{k+1}{n}\right) = z_{n,k+1} = z_0$$

entonces $[z_{0,k+1}, z_{0k}] = z_0 = [z_{n,k+1}, z_{nk}]$ *y por lo tanto la integral de* f *en* (vi) *a lo largo de estos dos lados es cero y así la integral de* f *sobre la curva* (vi) *es lo mismo que la integral de* f *a lo largo de la curva* $Q_k + Q_{k+1}^{-1}$*, es decir,*

$$\int_{Q_k + Q_{k+1}^{-1}} f = 0,$$

de donde se sigue la igualdad (iv) *que confirma la igualdad* (iii)*, quedando probado, finalmente el Teorema de Cauchy en su Forma Homotópica, como se quería.*

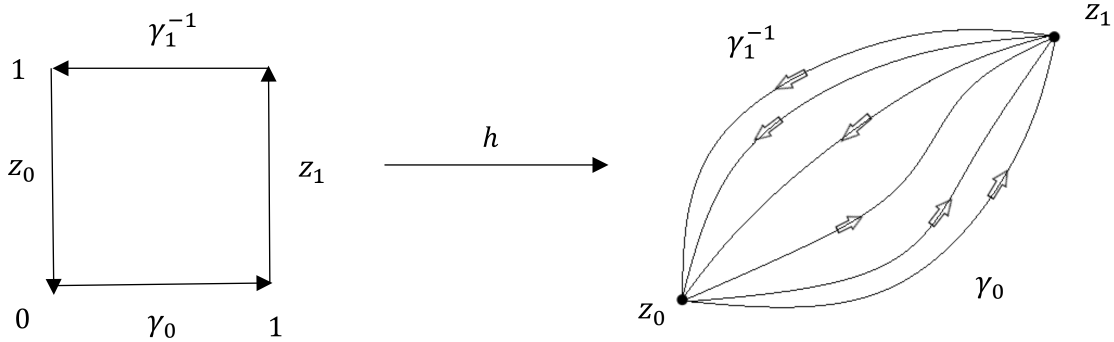
Una consecuencia inmediata del Teorema anterior es la independencia de curvas, que puede ser considerada como la segunda versión de la Forma Homotópica del Teorema de Cauchy.

3.3.2. Teorema (Forma Homotópica del Teorema de Cauchy, Segunda versión). *Si* γ_0 *y* γ_1 *son dos curvas rectificables en* G, *ambas con el mismo extremo inicial* z_0 *y con el mismo extremo final* z_1. *Si* γ_0 *es homotópica a* γ_1 *en* G, *entonces*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

para toda función f *analítica en* G.

Demostración. Sea h *una homotopía* $\gamma_0 \sim \gamma_1$ *y considere la orientación positiva de la curva dada por la frontera del cuadrado* $[0,1]\ x\ [0,1]$ *como en el lado izquierdo de la figura siguiente:*



Donde notamos que , bajo la homotopía h, el lado vertical izquierdo del cuadrado va a dar al punto z_0, el lado vertical derecho va al punto z_1, el lado horizontal inferior va a la curva γ_0 y el lado horizontal superior va a la curva γ_1^{-1} , por la orientación escogida del cuadrado.

Siendo γ_0 homotópica a γ_1 , la curva cerrada $\gamma = \{\gamma_0 + \gamma_1^{-1}\}$ es homotópica a un punto en G por ejemplo z_0. Aplicando el Teorema 3.2.1 (Forma Homotópica del Teorema de Cauchy)

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz_1$$

***3.3.3 Corolario**. Existencia de primitiva en conjuntos simplemente conexos.*

Si G es simplemente conexo y $f \epsilon H(G)$ entonces existe una primitiva F de f en G, es decir existe $F \epsilon H(G)$ tal que $F' = f$.

Demostración. Elijamos $z_0 \epsilon G$ y dejémoslo fijo. Tomemos un $z_1 \epsilon G$ cualquiera. Definamos la función

$$F(z_1) = \int_{\gamma} f(z)dz$$

donde γ es cualquier curva rectificable contenida en G que une z_0 con z_1. La función F está bien definida, es decir no depende de la curva γ elegida. En efecto, si tomamos dos curvas rectificables γ_1 y γ_2 contenidas en G que unan el punto z_0 con z_1, la curva cerrada $\gamma_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en G, porque G es simplemente conexo. Entonces γ_1 y γ_2 son homotópicas en G y por el teorema 3.2.2, la integral de f a lo largo de ambas curvas, da lo mismo.

Probemos que $F'(z_1)$ existe y es igual a $f(z_1)$. Elijamos un disco $B(z_1, r)$ de centro z_1 y radio positivo, contenido en G. Tomemos $z_2 \epsilon B(z_1, r)$ con $z_1 \neq z_2$. Elijamos una curva γ cualquiera que una z_0 con z_1 .

Tomemos el segmento $S: z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), t \epsilon [0,1]$ que une z_1 con z_2 . La curva $\gamma + S$ une z_0 con z_2 . Entonces:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma+S} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz$$

$$= \int_S f(z)dz$$

$$= \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))](z_2 - z_1)dz,$$

dividiendo entre $z_2 - z_1$ se deduce:

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))]dz$$

Tomando límite cuando $z_2 \to z_1$ *el integrando en la igualdad anterior tiende a* $f(z_1)$ *uniformemente con* $t \epsilon [0,1]$ *(porque* f *es continua en el segmento compacto* S*, por lo tanto es uniformemente continua en* S*). Resulta que existe el límite y es:*

$$\lim_{z_2 \to z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \lim_{z_2 \to z_1} \int_0^1 [f(z_1 + t(z_2 - z_1))] dz$$

Por definición de derivada ese límite es $F'(z_1) = f(z_1)$ *como queríamos demostrar.*

El siguiente teorema dice que es válido un recíproco del enunciado de la Forma Homotópica del Teorema de Cauchy, si se supone que la función es continua.

3.3.4 Teorema. *Sea* f *una función continua en el abierto* G*. Se cumple que* f *es analítica en G si y solo si*

$$\int_\gamma f = 0$$

para toda curva cerrada que sea $\gamma \sim z_0(G)$*.*

Demostración. La forma Homotópica del Teorema de Cauchy establece, si $f: G \to C$ *es una función analítica en* G *entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0 ,$$

para toda curva $\gamma: [0,1] \to G$ *cerrada en* G *tal que* $\gamma \sim z_0$.

Recíproco: Tomemos como hipótesis que f *es continua y que*

$$\int_{\gamma} f = 0 ,$$

para toda curva cerrada que sea homotópica a una curva constante $\gamma \sim z_0(G)$ *. Probaremos que* $f \in H(G)$.

Hay que probar que para todo $z_0 \in G$ *la función* f *es derivable en* z_0*, para esto tomemos un disco abierto* $B(z_0; r) \subset G$*, con* $r > 0$*. Cualquier curva cerrada* γ *contenida en* $B(z_0; r)$ *es homotópica a una punto* G*. Entonces, de la hipótesis se deduce que* $\int_{\gamma} f = 0$ *para toda curva cerrada* γ *contenida en* $B(z_0; r)$.

Por la parte (ii) del teorema 2.3.9, existe primitiva F *de* f *en* $B(z_0; r)$*, es decir existe* $F \in H(B(z_0; r))$ *tal que* $F'(z) = f(z) \ \forall z \in B(z_0; r)$*. Como toda función analítica es infinitamente derivable, existe* $F'' = f'$ *lo que muestra que* $f \in H(B(z_0; r))$*, y en particular es* f *derivable en* z_0.

Bibliografía

- ✓ *John B. Conway. F. of One Complex Variable. Editorial Board, 1986.*
- ✓ *Markushevich. T. de las Funciones Analiticas. Edit.Mir Moscu, 1987.*
- ✓ *Ruel V. Churchill. Complex Analysis. Editorial Mc Graw-Hill, 1994.*
- ✓ *Lars V. Ahlfors. Complex Analysis. Editorial Mc Graw-Hill, 1996.*
- ✓ *Elon Lages Lima. Grupo Fundamental e Espacos de Recobrimiento. Editorial Liuros Técnicos e Cientificos S.A. 1998.*
- ✓ *Simmons G.F. Topology y Modern Analysis. Editorial Mc Graw-Hill Book Company. New York 1963.*
- ✓ *Felipe Zaldívar, Teoría de Funciones de una Variable Compleja. 2012*
- ✓ *Algebraic braic Topology Homotopy and Homology http://scholar.google.com.pa/scholar?q=Algebraic+Topology+-+Homotopy+and+Homology&hl=es&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart*
- ✓ *Elements of Homotopy Theory. Carlos Prieto. January 8, 2010 https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/phocadownloadpap/Libros/topalgin.pdf*
- ✓ *Una introducción al Grupo Fundamental y algunas Aplicaciones. Jose D. Rodriguez A. 2015 https://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG_RODRIGUEZ+ABELLAN.pdf/be0f3e15-e16b-4d14-a3df-85f299c19441*
- ✓ *Algunos Resultados Topológicos. Perla Rebeca Sánchez Vargas. 15 febrero 2012 https://www.cimat.mx/~mmoreno/teaching/spring12/3.2.pdf*